Lösung zu Aufgabe 29, Aufgabenblatt 10

Seien R ein kommutativer Ring und V, W R-Moduln.

(a) (i) Behauptung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{Z}^3 &\to \mathbb{Z} \\ (q_1, q_2, q_3) &\mapsto q_1 + 2q_2 + 3q_3 \end{aligned}$$

ist $\mathbb{Z}$ -Linear.

Beweis:
F ist $\mathbb{Z}$-Linear, falls für $v, v^{'} \in \mathbb{Z}^3$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ gilt:
(1) $F(v + v^{'}) = F(v) + F(v^{'})$
(2) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$. (vgl. Def. 7.7)
Prüfe also im Folgenden die obigen Bedingung nach:
zu (1): Seien $v = (q_1, q_2, q_3)$ und $v^{'} := (q_1^{'}, q_2^{'}, q_3^{'}) \in \mathbb{Z}^3$.
Dann ist

$$\begin{aligned} F(v + v') &= F((q_1, q_2, q_3) + (q_1^{'}, q_2^{'}, q_3^{'})) \\ &= F((q_1 + q_1^{'}, q_2 + q_2^{'}, q_3 + q_3^{'})) \\ &= q_1 + q_1^{'} + 2(q_2 + q_2^{'}) + 3(q_3 + q_3^{'}) \\ &= (q_1 + 2q_2 + 3q_3) + (q_1' + 2q_2' + 3q_3') \\ &= F(v) + F(v') \end{aligned}$$

zu (2): Mit v wie oben und $\lambda \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= F(\lambda(q_1, q_2, q_3)) \\ &= F((\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3)) \\ &= \lambda q_1 + 2\lambda q_2 + 3\lambda q_3 \\ &= \lambda(q_1 + 2q_2 + 3q_3) \\ &= \lambda F(v). \end{aligned}$$

Damit erfüllt die Abbildung F also beide Bedingungen der $\mathbb{Z}$-Linearität.

(ii) Behauptung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (r, s) &\mapsto (min(r, s), max(r, s)) \end{aligned}$$

ist nicht $\mathbb{R}$-linear.

Beweis:(durch Gegenbeispiel)
Sei $a := -1 \in \mathbb{R}$ und $v := (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist die zweite Bedingung der Linearität (vgl. Def. 7.7) nicht erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} F(av) &= F((-1) \cdot (1, 2)) \\ &= F((-1, -2)) \\ &= (\min(-1, -2), \max(-1, -2)) \\ &= (-2, -1) \\ &= (-1)(2, 1) \\ &\neq (-1)(\min(1, 2), \max(1, 2)) \\ &= a\ F((1, 2)) \end{aligned}$$

q.e.d.

(iii) Behauptung: Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F : R^{\mathbb{N}} & \to & R^{\mathbb{N}} \\ (a_k)_{k\geq o} & \mapsto & (a_{2k})_{k\geq o} \end{array}$$

ist R-linear.

Beweis:

(1) Seien $v := (a_k)_{k\geq o}, v' = (b_k)_{k\geq o} \in R^{\mathbb{N}}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} F(v+v') &= F((a_k)_{k\geq o} + (b_k)_{k\geq o}) \\ &= F((a_k + b_k)_{k\geq o}) \\ &= (a_{2k} + b_{2k})_{k\geq o} \\ &= (a_{2k})_{k\geq o} + (b_{2k})_{k\geq o} \\ &= F((a_k)_{k\geq o}) + F((b_k)_{k\geq o}) \\ &= F(v) + F(v') \end{aligned}$$

(2) Sei $(a_k)_{k\geq o} \in R^{\mathbb{N}}$ und $\lambda \in R$, dann erhält man

$$\begin{aligned} F(\lambda(a_k)_{k\geq o}) &= F((\lambda a_k)_{k\geq o}) \\ &= (\lambda a_{2k})_{k\geq o} \\ &= \lambda(a_{2k})_{k\geq o} \\ &= \lambda F((a_k)_{k\geq o}) \end{aligned}$$

Damit sind beide Bedingungen der Linearität erfüllt.

(b) Behauptung: F aus (a)(i) ist nicht injektiv (1), aber surjektiv (2).

Beweis:

(1) F ist nicht injektiv, denn es gibt voneinander verschiedene $v, v' \in \mathbb{Z}^3$ so, dass $F(v) = F(v')$. Sei $v := (2,0,0)$ und $v' := (0,1,0)$.
Dann gilt $F(v) = 2 = F(v')$ aber $v \neq v'$.

(2) F ist surjektiv:
Sei $x \in \mathbb{Z}$ und $v = (x,0,0) \in \mathbb{Z}^3$. Dann gilt $F(v) = x$, d.h. zu jedem beliebigen Punkt in $\mathbb{Z}^3$ existiert ein Urbildpunkt aus $\mathbb{Z}$.

q.e.d.

Behauptung: F aus (a)(iii) ist nicht injektiv (1), aber surjektiv (2).

Beweis:

(1) Annahme:F ist injektiv.
Dann gilt für $v, v' \in R^{\mathbb{N}}$ mit $v \neq v'$ auch $F(v) \neq F(v')$. Seien $v := (0,0,0,0,0,0,\ldots)$ und $v' := (0,1,0,1,0,1,\ldots)$ dann gilt $v \neq v'$, aber $F(v) = (0,0,0,0,\ldots) = F(v')$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, d.h. F ist wie behauptet nicht injektiv.

(2) Zu zeigen: Für alle $x \in R^{\mathbb{N}}$ gibt es ein $v \in \mathbb{R}^N$ so, dass $x = F(v)$ gilt.
Sei nun $x = (a_k)_{k\geq o}$ und $v := (a_o, 0, a_1, 0, a_2, \ldots)$, dann erhält man

$$\begin{aligned} F(v) &= F((a_o, 0, a_1, 0, a_2, \ldots)) \\ &= (a_o, a_1, a_2, a_3, \ldots) \\ &= x \end{aligned}$$

q.e.d.