Aufgabe 31. *Seien K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times(n-m)}$ und es gelte $\mathsf{Rang}\, A = m$, $\mathsf{Rang}\, B = n - m$ und $AB = 0$. Zeigen Sie:*

(i) $\mathsf{Kern}\, L_A = \mathsf{SR}(B)$.

(ii) $\mathsf{Kern}\, L_{{}^tB} = \mathsf{SR}({}^tA)$.

Anmerkung: *Die Behauptung* $\mathsf{Kern}\, L_{{}^tB} = \mathsf{ZR}({}^tA)$ *in der ursprünglichen Aufgabenstellung ist leider nicht beweisbar.*

Lösung. Zu (a). Wir zeigen zunächst $\mathsf{SR}(B) \subseteq \mathsf{Kern}\, L_A$. Sei dazu $B = [B_{\bullet 1}, \ldots, B_{\bullet(n-m)}]$. Wegen $AB = 0$ gilt auch $AB_{\bullet i} = 0$ für $1 \le i \le n - m$. Also gilt $B_{\bullet i} \in \mathsf{Kern}\, L_A$ für $1 \le i \le n - m$. Nach Satz 6.9 (c) ist damit aber bereits

$$\langle B_{\bullet 1}, \ldots, B_{\bullet(n-m)}\rangle_K = \mathsf{SR}(B) \subseteq \mathsf{Kern}\, L_A.$$

Alternativer Beweis für diese Inklusion: Nach Definition (im dem Beispiel nach Satz 6.10) ist

$$\mathsf{SR}(B) = \langle B_{\bullet 1}, \ldots, B_{\bullet(n-m)}\rangle_K = \Big\{ \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i B_{\bullet i} \;\Big|\; \lambda_i \in K \text{ für } 1 \le i \le n-m \Big\} = \{Bx \mid x \in K^{(n-m)\times 1}\},$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Definition der Matrixmultiplikation gilt. (Siehe auch Rechenbeispiele im ersten Paragraphen). Sei nun $y \in \mathsf{SR}(B)$ beliebig. Nach der obigen Mengengleichheit gibt es ein $x \in K^{(n-m)\times 1}$ derart, dass $y = Bx$ gilt. Mit den Rechnenregeln der Matrixmultiplikation (Satz 1.13) und der Voraussetzung erhalten wir nun

$$L_A(y) = Ay = A(Bx) = (AB)x = 0x = 0.$$

Also gilt $y \in \mathsf{Kern}\, L_A$, und es folgt $\mathsf{SR}(B) \subseteq \mathsf{Kern}\, L_A$.

Wir zeigen jetzt mit Hilfe des ersten Teils und Satz 6.23 (d), dass $\mathsf{SR}(B) = \mathsf{Kern}\, L_A$ ist. Dazu bestimmen wir die Dimensionen von $\mathsf{Kern}\, L_A$ und $\mathsf{SR}(B)$. Die Dimension von $\mathsf{SR}(B)$ ist nach Satz 8.4 gleich $\mathsf{Rang}\, B$. Mit der Aufgabenstellung erhalten wir somit $\dim_K \mathsf{SR}(B) = \mathsf{Rang}\, B = n - m$.

Für $\dim_K \mathsf{Kern}\, L_A$ wollen wir die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 8.3) verwenden. Nach Beispiel 7.9 (b) ist $\mathsf{Bild}\, L_A = \mathsf{SR}(A)$. Wir können also wieder mit Satz 8.4 berechnen, dass $\dim_K \mathsf{Bild}\, L_A = \dim_K \mathsf{SR}(A) = \mathsf{Rang}\, A = m$ gilt nach Voraussetzung. Dies eingesetzt in die Dimensionsformel

$$\dim_K K^{n\times 1} = \dim_K \mathsf{Kern}\, L_A \;+\; \dim_K \mathsf{Bild}\, L_A$$

ergibt zusammen mit $\dim_K K^{n\times 1} = n$ (Beispiel 6.20 (a))

$$n = \dim_K \mathsf{Kern}\, L_A \;+ m$$

oder einfach $\dim_K \mathsf{Kern}\, L_A = n - m = \dim_K \mathsf{SR}(B)$.

Damit wissen wir nun $\dim_K \mathsf{SR}(B) = \dim_K \mathsf{Kern}\, L_A$ und $\mathsf{SR}(B) \subseteq \mathsf{Kern}\, L_A$. Nach Satz 6.23 (d) folgt nun, dass $\mathsf{SR}(B) = \mathsf{Kern}\, L_A$ gelten muss, was zu zeigen war. □

Zu (b). Es gilt nach Regel 3.9

$${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB) = {}^t(0_{m\times(n-m)}) = 0_{(n-m)\times m}.$$

Weiterhin ist nach Satz 8.4 $\mathsf{Rang}\, {}^tB = \mathsf{Rang}\, B = n - m$ und $\mathsf{Rang}\, {}^tA = \mathsf{Rang}\, A = m$. Wenn wir $r = n - m$ setzen, ist also ${}^tB \in K^{r\times n}$, $\mathsf{Rang}\, {}^tB = r$, ${}^tA \in K^{n\times(n-r)}$, $\mathsf{Rang}\, {}^tA = n - r$ und $r < n$. Damit haben wir (mit „${}^tB = A$“, „${}^tA = B$“ und „$r = m$“) alle Voraussetzungen für den bereits bewiesenen Teil (a) erfüllt, und die Behauptung folgt. □

Alternativ kann man auch wieder analog zu Teil (a) direkt rechnen: $\mathsf{SR}({}^tA) \subseteq \mathsf{Kern}\, L_{{}^tB}$ gilt, da für $y = {}^tAx \in \mathsf{SR}({}^tA)$ gilt

$$L_{{}^tB}(y) = {}^tBy = {}^tB\,{}^tAx = {}^t(AB)x = 0x = 0.$$

$\mathsf{Rang}\, {}^tB = n - m$ gewinnt man wieder aus Satz 8.4 und damit $\dim_K \mathsf{Kern}\, L_{{}^tB} = m$ aus der Dimensionsformel. Mit dem Satz 8.4 gilt auch $\mathsf{Rang}\, {}^tA = m$ und wegen Satz 6.3 (d) erhält man insgesamt auch hier die Behauptung.