Aufgabe 34. *Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum,* $\dim_K V = n \geq 2$ *und* Γ, Γ' *zwei affine Unterräume von V.*

Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass Γ, Γ' *Hyperebenen und nicht parallel sind:*

(i) *Gamma* $\cap\, \Gamma' = \varnothing$,

(ii) $\dim_K(\Gamma \cap \Gamma') = n - 2$.

Lösung. Seien $\Gamma = v + U$ und $\Gamma' = v' + U'$ mit Vektoren v und $v' \in V$ sowie Unteräumen U und $U' \subseteq V$. (Nach Definition 9.1 (a) sind affine Unteräume entweder leer oder von dieser Gestalt – die leere Menge wird jedoch jeweils durch die Forderung ausgeschlossen, dass beides Hyperebenen sein sollen.)

Zu (a). Wir zeigen zunächst, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $U+U' = V$ gelten muss. Nach Definition 9.1 (c) und der Voraussetzung gilt $\dim_K U = \dim_K \Gamma = \dim_K V - 1 = n - 1$. Ebenso erhält man $\dim_K U' = n - 1$. Dass Γ und Γ' nicht parallel sind, bedeutet nach Definition 9.1 (b), dass $U \not\subseteq U'$ und $U' \not\subseteq U$ gelten. Wir finden also einen Vektor $x \in U'$, der nicht in U liegt. Sei nun $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ eine Basis von U. (Eine solche existiert nach Satz 6.23 (d), da V endlichdimensional ist, und besitzt wegen $\dim_K U = n - 1$ die Länge $n - 1$). Wir wissen nun $x \notin \langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle_K = U$. Da $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ als Basis insbesondere linear unabhängig ist, folgt also mit Regel 6.22 (oder Aufgabe (25)), dass auch die Familie $(u_1, \ldots, u_{n-1}, x)$ linear unabhängig ist. Der von $(u_1, \ldots, u_{n-1}, x)$ aufgespannte Unterraum besitzt also die Dimension n, ist natürlich in V enthalten und muß daher nach Satz 6.23 (d) bereits gleich V sein. Da auch U und U' Mengen von Vektoren aus V sind und V abgeschlossen bezüglich der Addition ist, folgt insgesamt

$$V = \langle u_1, \ldots, u_{n-1}, x\rangle_K \subseteq U + U' \subseteq V.$$

Damit ist $U + U' = V$ gezeigt.

Wir beweisen nun die Behauptung aus Teil (a). Es gilt sicherlich $v - v' \in V = U + U'$, da V abgeschlossen bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation ist. Alle Vektoren und insbesondere $v - v'$ lassen sich als Summe eines Vektors aus U und eines aus U' darstellen. Wir finden also $u \in U$ und $u' \in U'$, so dass $v - v' = u - u'$ gilt. (Da U' ein Unterraum ist, liegt mit u' natürlich auch $-u'$ in U). Diese Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu $v + u = v' + u'$. Nun ist wegen $u \in U$ aber $v + u \in v + U = \Gamma$ und analog $v + u = v' + u' \in \Gamma'$. Damit liegt $v + u \in \Gamma \cap \Gamma'$ und es folgt $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$.

Alternative. Es hätte oben gereicht zu zeigen, dass $\langle u_1, \ldots, u_{n-1}, x\rangle$ eine Basis von V ist. Damit wäre $v - v' = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j u_j + \mu x$ für geeignete λ_j, $1 \leq j \leq n - 1$, und $\mu \in K$. Mit $u = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u_j \in U$ und $\mu(-x) \in U'$ – da beides Unterräume sind – gilt dann ebenfalls eine Gleichung $v - v' = u - u'$.

Es hätte auch Beispiel 6.31 aus der Vorlesung zitiert werden können, da man leicht $U \neq U'$ zeigen kann.

Zu (b). Da $\Gamma \cap \Gamma'$, wie in Teil (a) bereits bewiesen wurde, nicht leer ist, existiert ein $v^* \in \Gamma \cap \Gamma'$. Weiterhin gilt damit nach Satz 9.10 (a) (i)

$$\Gamma \cap \Gamma' = v^* + U \cap U'.$$

Nach Definition 9.1 (c) ist damit $\dim_K(\Gamma \cap \Gamma') = \dim_K(U \cap U')$. Diese Dimension berechnen wir mit der Dimensionsformel für Untervektorräume 6.29. Damit gilt

$$\dim_K U + \dim_K U' = \dim_K(U + U') + \dim_K(U \cap U').$$

Dies nach der gesuchten Dimension aufgelöst ergibt

$$\dim_K(U \cap U') = \dim_K U + \dim_K U' - \dim_K(U + U').$$

Wir wissen nach Voraussetzung (und Definition 9.1 (c)), dass $\dim_K U = \dim_K \Gamma = n - 1 = \dim_K \Gamma' = \dim_K U'$ gilt. In Teil (a) haben wir $U + U' = V$ gezeigt, womit sich nach Voraussetzung $\dim_K(U + U') = n$ ergibt. Dies in die Dimensionsformel eingesetzt liefert nun

$$\dim_K(U \cap U') = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2,$$

wie behauptet wurde.

Alternativ hätte für die Dimension von $U \cap U'$ auch hier wieder Beispiel 6.31 verwendet werden können.