Aufgabe 35 Zeigen Sie folgende Behauptung: Seien $\Gamma = v+U$ und $\Gamma' = v'+U'$ affine Unterräume des K-Vektorraums V. Falls $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$, dann ist

$$\Gamma \vee \Gamma' = v + (U + U').$$

Lösung "$\supseteq$": Nach 9.2(c) ist $\Gamma \vee \Gamma'$ ein affiner Unterraum. Sei also $\Gamma \vee \Gamma' =: w + W$ mit $w \in V$, $W \subseteq V$ Untervektorraum.

Da U ein Untervektorraum ist, gilt $0_V \in U$, denn nach UM1 gilt $U \neq \varnothing$ und aus UM3 folgt, daß mit $x \in U$ auch $0_K \cdot x = 0_V \in U$ gilt. Damit erhalten wir nun $v \in \Gamma \subseteq \Gamma \vee \Gamma'$ und $v' \in \Gamma' \subseteq \Gamma \vee \Gamma'$, da nach Definition 9.9 $\Gamma \vee \Gamma'$ sowohl Γ als auch Γ' umfaßt. Also können wir nach Satz 9.2(a) sowohl v also auch v' als Stützvektor von $\Gamma \vee \Gamma'$ wählen:

$$\Gamma \vee \Gamma' = w + W = v + W = v' + W.$$

Für ein beliebiges $u \in U$ gilt nun $v + u \in \Gamma \subseteq \Gamma \vee \Gamma' = v + W$, also existiert ein $\tilde{w} \in W$ mit $v + u = v + \tilde{w}$. Damit folgt $u = \tilde{w} \in W$. (Da $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, existiert das additive Inverse!) Für ein beliebiges $u' \in U'$ folgt aus $v' + u' \in \Gamma' \subseteq \Gamma \vee \Gamma' = v' + W$ analog, daß $u' \in W$ gilt. Da W ein Untervektorraum ist, gilt wegen UM2 also $U + U' \subseteq W$ und damit

$$v + (U + U') \subseteq v + W = \Gamma \vee \Gamma'.$$

"$\subseteq$": Wir zeigen, daß $v + (U + U')$ ein affiner Unterraum ist und daß $\Gamma \cup \Gamma' \subseteq v + (U + U')$. Da nach Definition 9.9 $\Gamma \vee \Gamma'$ die Schnittmenge aller solchen affinen Unterräume ist, folgt daraus schon $\Gamma \vee \Gamma' \subseteq v + (U + U')$.

Es ist $v + (U + U')$ ein affiner Unterraum, da $U + U'$ ein Untervektorraum ist (Beweis siehe unten). Außerdem gilt $\Gamma = v + U \subset v + (U + U')$, da $0_V \in U'$. Da nach Voraussetzung $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$ gilt, existiert also ein $u \in U$, so daß $v + u \in \Gamma'$ gilt. Damit ist nach Satz 9.2(a)

$$\Gamma' = v + u + U' \underset{u \in U}{\subset} v + (U + U').$$

Zusatz Seien $U, U' \subseteq V$ Untervektorräume. Dann ist auch $U + U' = \{u + u' : u \in U, u' \in U'\}$ ein Untervektorraum.
Beweis: Es gilt nach UM1 für U und U', daß $U \neq \varnothing \neq U'$, also auch $U + U' \neq \varnothing$. Damit ist UM1 für $U + U'$ erfüllt. Seien nun $x, y \in U + U'$ d.h. $x = u_1 + u_1'$ mit $u_1 \in U$, $u_1' \in U'$ und $y = u_2 + u_2'$ mit $u_2 \in U$, $u_2' \in U'$, dann gilt wegen UM2 für U und U', dass $u_1 + u_2 \in U$ und $u_2 + u_2' \in U'$. Da $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, folgt daraus $x + y = u_1 + u_1' + u_2 + u_2' = u_1 + u_2 + u_1' + u_2' \in U + U'$. Also gilt UM2 auch für $U + U'$. Sei nun wieder $x = u + u' \in U + U'$ und $\lambda \in K$. Da UM3 für U und U' gilt, folgt $\lambda u \in U$ und $\lambda u' \in U'$. Aus den Vektorraumaxiomen für V folgt nun $\lambda x = \lambda(u + u') = \lambda u + \lambda u' \in U + U'$, also erfüllt $U + U'$ auch UM3.