Aufgabe (4)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Abbildung mit $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ für $x \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$

(b) Es gibt eine Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$ und $g \neq h$.

Lösung:

(a) Behauptung: Für $g(x) := 2x$ gilt $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$.

Beweis: Es ist $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \left\lfloor \frac{2x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor = x = id_{\mathbb{N}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $\square$

(b) Behauptung: Für $h(x) := 2x + 1$ gilt ebenfalls $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$.

Beweis: Es ist $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(2x + 1) = \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = x$
$= id_{\mathbb{N}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Weiter ist $g = h$, genau dann wenn gilt $2x = 2x + 1$ und das ist genau dann der Fall, wenn $0 = 1$ gilt. Dies stellt ein Widerspruch dar, also ist $g \neq h$. $\square$