Aufgabe (5)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $f(x, y) = 2x - y$. Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0, 1\}) =: M$ und versuchen Sie M zu skizzieren.

Lösung:

Wir gehen in zwei Schritten vor.

Bestimme zuerst $f^{-1}(\{0\}) =: M_0$. Sei dazu $(a, b) \in f^{-1}(\{0\})$. Dann gilt $0 = f(a, b) = 2a - b$. Daraus folgt $b = 2a$.

Umgekehrt gilt: $f(a, 2a) = 2a - 2a = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Also: $M_0 = \{\ (a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\ \}$.

Bestimme nun $f^{-1}(\{1\}) =: M_1$. Sei dazu $(a, b) \in f^{-1}(\{1\})$. Dann gilt $1 = f(a, b) = 2a - b$. Daraus folgt $b = 2a - 1$.

Umgekehrt gilt: $f(a, 2a - 1) = 2a - (2a - 1) = 2a - 2a + 1 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Also: $M_1 = \{\ (a, 2a - 1) \mid a \in \mathbb{R}\ \}$.

Also ist $M = M_0 \cup M_1$.

Zeichnung:

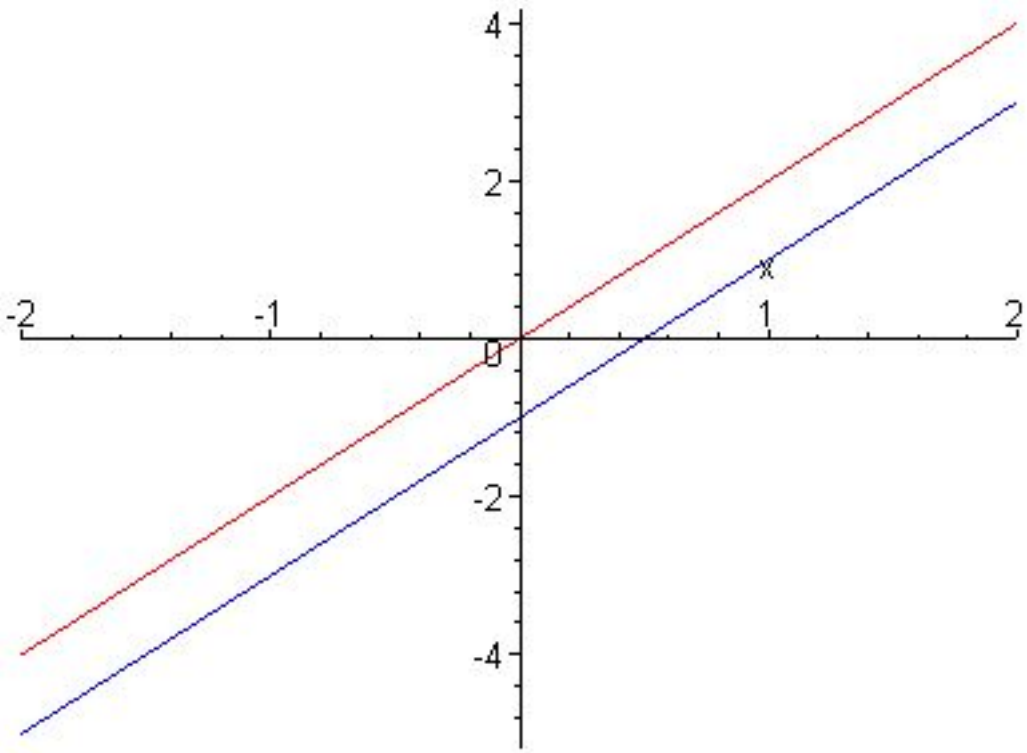

Abbildung 1: rot = M_0, blau = M_1