Aufgabe (8)

Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $\mathcal{S}$ die Menge der so genannten stochastischen $n \times n$-Matrizen.
Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt *stochastisch*, wenn gilt:

(i) $a_{i,j} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *(alle Einträge nicht-negativ)*

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ *(in jeder Zeile Zeilensumme 1)*

Zeigen Sie: Für $A, B \in \mathcal{S}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt:

(a) $\lambda A + \mu B \in \mathcal{S}$

(b) $A \cdot B \in \mathcal{S}$

Lösung

Für die beiden in (a) und (b) genannten Verknüpfungen zweier stochastischer Matrizen A und B müssen die Eigenschaften (i) und (ii) stochastischer Matrizen nachgewiesen werden.
Seien $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{S}$.

Beweis zu (a)

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lambda + \mu = 1$.

Nachweis von Eigenschaft (i) Zu zeigen: Alle Einträge von $\lambda A + \mu B$ sind nicht-negativ.
Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Der Eintrag mit den Indizes i, j von $\lambda A + \mu B$ ist $\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$. Er ist nicht-negativ, da nach Voraussetzung $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $a_{i,j}, b_{i,j} \geq 0$ und Produkte und Summen nicht-negativer reeller Zahlen nicht-negativ sind.

Nachweis von Eigenschaft (ii) Zu zeigen: Die Summe jeder Zeile von $\lambda A + \mu B$ ist 1.
Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Für die Summe der i. Zeile von $\lambda A + \mu B$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \mu b_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \overset{(*)}{=} \lambda + \mu = 1.$$

Bei $(*)$ geht ein, dass A und B stochastische Matrizen sind und daher $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ und $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1$ gelten.

Beweis zu (b)

Nachweis von Eigenschaft (i) Zu zeigen: Alle Einträge von $A \cdot B$ sind nicht-negativ.
Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Der Eintrag mit den Indizes i, j von $A \cdot B$ ist nach Definition der Matrizenmultiplikation $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$. Er ist nicht-negativ, da nach Voraussetzung $a_{i,j}, b_{i,j} \geq 0$ und Produkte und Summen nicht-negativer reeller Zahlen nicht-negativ sind.

Nachweis von Eigenschaft (ii) Zu zeigen: Die Summe jeder Zeile von $A \cdot B$ ist 1. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Für die Summe der i. Zeile von $A \cdot B$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \overset{(I)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j}$$
$$\overset{(II)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot 1 \overset{(III)}{=} 1 \cdot 1 = 1.$$

Bei (I) darf die Summation über j mit $a_{i,k}$ vertauscht werden, weil $a_{i,k}$ von dieser Summation unabhängig ist. Bei (II) bzw. (III) geht ein, dass B bzw. A stochastische Matrizen sind und daher $\sum_{j=1}^{n} b_{k,j} = 1$ für alle k bzw. $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$ für alle i gelten.