Aufgabe (B). *Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.*

(a) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie aus V. Zeigen Sie nur mit Hilfe der Definition eines Aufspannes und der Definition der linearen Unabhängigkeit:

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_K \cap \langle v_1, v_2, v_4 \rangle_K = \langle v_1, v_2 \rangle_K.$$

(b) Seien U und W Untervektorräume von V und gelte:

$$U \subseteq W \qquad \textit{und} \qquad \dim_K U = \dim_K V.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Ergebnissen aus der Vorlesung, dass dann U und V gleich sind.

(c) Sei $\dim_K V \geq 3$. Sei U ein von V verschiedener Untervektorraum von V, der jeden zweidimensionalen Untervektorraum von V in mehr als einem Punkt schneidet. Welche Werte kann die Dimension von U annehmen? Geben Sie eine ausführliche Begründung mit Ergebnissen aus der Vorlesung und bei Bedarf auch mit Teil (b).

Lösung. Zu (a). Sei ein Vektor $x \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_K \cap \langle v_1, v_2, v_4 \rangle_K$ gegeben. Das bedeutet, dass x sowohl in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_K$ als auch in $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle_K$ enthalten ist. Nach der Definition des Spannes (Definition 6.8) bedeutet dies, dass Skalare λ_1, λ_2, λ_3 beziehungsweise μ_1, μ_2 und μ_4 aus K existieren mit

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \quad \text{und} \quad x = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_4 v_4.$$

Subtraktion dieser Gleichungen liefert

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \lambda_3 v_3 - \mu_4 v_4 = 0.$$

Da v_1, v_2, v_3 und v_4 als linear unabhängig angenommen waren, folgt daraus $\lambda_3 = 0$ und $\mu_4 = 0$ mit Definition 6.11. (Allerdings können $\lambda_1 = \mu_1$ und $\lambda_2 = \mu_2$ immer noch ungleich Null sein). Weil x beliebig war, haben wir gezeigt, dass alle Elemente im Schnitt Linearkombinationen von v_1 und v_2 sind. Es folgt

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_K \cap \langle v_1, v_2, v_4 \rangle_K \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle_K.$$

Wir zeigen nun auch die umgekehrte Inklusion. Sei dazu $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle_K$ gegeben mit α_1 und $\alpha_2 \in K$. Dann ist x wegen $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0 \cdot v_3$ und $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0 \cdot v_4$ aber auch in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_K$ und in $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle_K$ also auch im Schnitt dieser beiden enthalten. Damit ist die andere Inklusion ebenfalls gezeigt und die Behauptung der Mengengleichheit vollständig bewiesen. □

Zu (b). *Erste Variante:* W ist als Untervektorraum des K-Vektorraumes V selbst wieder ein K-Vektorraum. Da U in W enthalten ist und als Untervektorraum von V die Eigenschaften aus der Definition 6.6 erfüllt, ist U nach eben dieser Definition auch wieder ein Untervektorraum von W. Da V endlich dimensional ist, gilt dies nach Satz 6.23 (d) (Monotonie der Dimension) auch für W. Also läßt sich dieser Satz 6.23 (d) auch auf W und dessen Untervektorraum U anwenden und man erhält wegen $\dim_K U = \dim_K W$ daraus, dass $U = W$ gelten muss. □

Zweite Variante: Wir beweisen die Aussage nun mit dem Basisaustauschsatz 6.23 (c). Wegen der Monotonie der Dimension (Satz 6.3 (d)) sind auch U und W als Untervektorräume des endlich dimensionalen Vektorraumes V endlich dimensional. Sei etwa $\dim_K U = n = \dim_K W$. Es existieren nach Satz 6.23 (a) Basen $(u_1, \ldots, u_n)$ von U und $(w_1, \ldots, w_n)$ von W. Nach dem Basisaustauschsatz 6.23 (c) kann man nun, da $(u_1, \ldots, u_n)$ als Basis linear unabhängig ist und diese Vektoren alle in W enthalten sein müssen wegen $U \subseteq W$, n – also alle – Vektoren aus $(w_1, \ldots, w_n)$ durch die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ ersetzen, ohne dass die Basiseigenschaft verloren geht. Daher ist $(u_1, \ldots, u_n)$ ebenfalls eine Basis von W. Da U die Menge aller Linearkombinationen dieser Basis ist und W die Menge aller Linearkombinationen dieser Basis, müssen sie folglich bereits gleich sein. □

Dritte Variante: Wir beweisen die Aussagen durch Widerspruch. Wie oben gezeigt besitzt U eine Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ mit $n = \dim_K U$. Wäre $U \neq W$, so gäbe es einen Vektor x in W, der nicht in U liegt. Dass

$x \notin \langle u_1, \ldots, u_n \rangle_K = U$ ist, ist nach Regel 6.22 (oder Aufgabe (25)) äquivalent damit, dass $(u_1, \ldots, u_n, x)$ linear unabhängig ist. Wir können nach dem Basisergänzungssatz 6.23 (e) also $(u_1, \ldots, u_n, x)$ zu einer Basis von W ergänzen. Diese hätte allerdings mindestens die Länge $n+1$, im Widerspruch dazu, dass nach Satz 6.18 und Definition 6.19 wegen $\dim_K W = \dim_K U = n$ jede Basis von W genau die Länge n besitzt. Also kann es kein solches x geben, und es muss $U = W$ gelten, da wir bereits wissen, dass $U \subseteq W$ ist. $\square$

Zu (c). Die Dimension von U kann nur $n-1$ betragen. Dies wird durch Widerspruch bewiesen. Zunächst muss sie nach Satz 6.23 (d) kleiner oder gleich derjenigen von V sein. Wäre nun $\dim_K U = n$, so gälte bereits $U = V$ nach Teil (b) (oder Satz 6.23. (d)) entgegen der Voraussetzung. Wäre andernfalls die Dimension von $U = m \leq n-2$, so könnte man eine Basis $(u_1, \ldots, u_m)$ von U zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_\ell)$ von V ergänzen, wobei $\ell \geq 2$ gelten muss, da jede Basis von V die Länge n besitzt nach Satz 6.18 (c). Wir behaupten, dass $\langle v_1, v_2 \rangle_K$ dann ein linearer Unterraum der Dimension 2 von V ist, der U in höchstens einem Punkt schneidet. Sei dafür $x \in U \cap \langle v_1, v_2 \rangle_K$. Das bedeutet, dass x sich sowohl als Linearkombination von $u_1, \ldots, u_m$ als auch v_1 und v_2 darstellen läßt. Sei etwa

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m = x \quad \text{und} \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = x$$

mit geeigneten $\lambda_j \in K$ für $j = 0, \ldots, m$ und ebensolchem α_1 sowie $\alpha_2 \in K$. Subtraktion der Gleichungen liefert

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 = 0.$$

Da die Familie $(u_1, \ldots, u_m, v_1, v_2)$ als Teil einer Basis linear unabhängig ist, folgt daraus $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ wegen Definition 6.11. Damit haben wir gezeigt, dass x höchstens der Nullvektor sein kann. Insgesamt folgt, dass U den zweidimensionalen Unterraum $\langle v_1, v_2 \rangle_K$ in höchstens einem Punkt schneidet, was unserer Annahme widerspricht. Es bleibt als möglicher Wert für die Dimension von U also höchstens $n-1$ übrig. $\square$

Zusatz zum Zusatz: Auch wenn die Aufgabenstellung es nicht verlangt, wollen wir nun noch zeigen, dass tatsächlich umgekehrt jeder $(n-1)$-dimensionale Unterraum (jede Hyperebene – vergleiche Definition 6.30) diese Eigenschaft besitzt. Sei also U eine Hyperebene in V mit Basis $(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Sei weiterhin W ein zweidimensionaler Unterraum von V mit Basis (w_1, w_2). Da Schnitte von Untervektorräumen selbst Untervektorräume sind, liegt stets der Nullvektor darin. Wir müssen also nur zeigen, dass es einen von Null verschieden Vektor $x \in W \cap U$ gibt. Die Familie $(u_1, \ldots, u_{n-1}, w_1, w_2)$ besitzt die Länge $n+2$ und muss daher linear abhängig sein wegen Satz 6.23 (c). Seien nun Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, α_1 und $\alpha_2 \in K$ gegeben, nicht alle Null, mit

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1} + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0. \tag{$*$}$$

Wir zeigen nun, dass $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ von Null verschieden sein muss. Wäre es nämlich gleich Null, so folgte, da die Familie $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ als Basis linear unabhängig ist, aus der obigen Linearkombination $(*)$, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ gilt. Weil aber auch (w_1, w_2) eine Basis und damit linear unabhängig ist, muss bei $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$ auch $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gelten und alle Koeffizienten in $(*)$ wären Null im Widerspruch zur oben festgestellten linearen Abhängigkeit. Also gilt $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \neq 0$ und wegen

$$-\lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_{n-1} u_{n-1} = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

ist ein von Null verschiedener Vektor in $U \cap W$ gefunden. Damit enthält der Schnitt mindestens zwei Elemente, und da W beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$