5.13 Erste Eigenschaften der Determinante,
Verhalten bei elementaren Zeilenumformungen:

Seien $n, N \in \mathbb{N}_+, A \in R^{n\times n}, \epsilon, \lambda \in R, U, U_N, \ldots, U_1$ Elementarmatrizen aus $R^{n\times n}$ und sei ϵ invertierbar. Dann gilt:

(a) $\mathsf{det}\, E_n = 1$

(b) Hat A eine Nullzeile, so ist $\mathsf{det}\, A = 0$.

(c) Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\mathsf{det}\, A = 0$.

(d) $\mathsf{det}\big(S_k(\epsilon)A\big) = \epsilon\, \mathsf{det}\, A$ für $k \in I_n$ und insbesondere: $\mathsf{det}\big(S_k(\epsilon)\big) = \epsilon$.

(e) $\mathsf{det}\big(Q_k^l(\lambda)A\big) = \mathsf{det}\, A$ für $k, l \in I_n, k \neq l$ und insbesondere: $\mathsf{det}\big(Q_k^l(\lambda)\big) = 1$.

(f) $\mathsf{det}\big(P_k^l A\big) = -\mathsf{det}\, A$ und insbesondere: $\mathsf{det}\big(P_k^l\big) = -1$.

(g) $\mathsf{det}\,(U^{-1}) = (\mathsf{det}\, U)^{-1}$ und $\mathsf{det}\, {}^{\mathsf{t}}U = \mathsf{det}\, U$.

(h) $\mathsf{det}\big(U_N \cdots U_1 \cdot A\big) = (\mathsf{det}\, U_N) \cdots (\mathsf{det}\, U_1) \cdot (\mathsf{det}\, A)$.

(i) Wenn A in ZSF ist, etwa $A = (a_{ij})$, dann ist $\mathsf{det}\, A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Erinnert man sich daran, dass die Multiplikation von Links mit Elementarmatrizen jeweils einer elementaren Zeilenumformung entspricht, so erkennt man, dass die Eigenschaften aus 5.13 einen praktischen Ansatzpunkt liefern für die Berechnung von Determinanten! Hierauf kommen wir in 5.15 zurück.
Als Folgerungen aus 5.13 erhalten wir weitere wichtige Eigenschaften der Determinante.

5.14 weitere Eigenschaften der Determinante für Körper:

Sei K ein Körper und seien $A, A' \in K^{n\times n}$, dann gilt:

(1) $\mathsf{det}\, A = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{Rang}\, A < n$

(2) $\mathsf{det}\,(AA') = (\mathsf{det}\, A)(\mathsf{det}\, A')$.

(3) $\mathsf{det}\, {}^{\mathsf{t}}A = \mathsf{det}\, A$.

Bemerkung: Bisher wurden elementare Umformungen bei den Determinanteneigenschaften in den Mittelpunkt gestellt. Diese stellen auch das Haupthilfsmittel bei der Berechnung von Determinanten dar. Da über Körpern mit elementaren Umformungen recht viel erreicht werden kann, erhält man dann insbesondere die Eigenschaften (2) und (3) in 5.14 sozusagen geschenkt. Dadurch entsteht aber der falsche Eindruck, dass die Gültigkeit dieser beiden Eigenschaften auf Körper begrenzt ist. Später in 5.16 werden sie im Zusammenhang mit weiteren über beliebigen kommutativen Ringen gültigen Eigenschaften noch einmal aufgeführt.

5.15 Zur Berechnung von Determinanten über einem Körper:

Auf Grund der bisher bereits erhaltenen Eigenschaften der Determinante lässt sich nun ein denkbar einfaches Verfahren zur Determinantenberechnung angeben. Sei $A \in K^{n\times n}$. Wenn $A = 0$, dann ist $\mathsf{det}\, A = 0$. Wenn $A \neq 0$, dann können wir die Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen in eine ZSF umformen. Wegen 5.13 (i) kann die Rechnung mit dem Ergebnis $\mathsf{det}\, A = 0$ abgebrochen werden, sobald erkennbar wird, dass in der ZSF ein Diagonaleintrag 0 wird. Tritt dies nicht ein, so erhält man mit Elementarmatrizen $U_N, \cdots, U_1$ die ZSF $B := (b_{ij}) := U_N \cdots U_1 \cdot A$ und nach 5.13 (h):

$$\mathsf{det}\, A = (\mathsf{det}\, U_1)^{-1} \cdots (\mathsf{det}\, U_N)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{ii}$$

Vereinfachend wirkt sich dabei aus, dass Elementarmatrizen vom Typ III stets die Determinante 1 und Elementarmatrizen vom Typ IV stets die Determinante -1 haben.

Bemerkungen zum Beweis von 5.13:

In der Vorlesung werden exemplarisch die Regeln **(a),(b),(d)** aus der Leibnizformel (L_n) abgeleitet. Im Vordergrund steht dabei der Umgang mit der ja doch recht komplexen Leibnizformel. Ebenfalls durch Lesen von (L_n) erhält man auch für (e) zunächst das Ergebnis

$$\det\left(Q_k^l(\lambda)\cdot A\right) = \det A + \lambda \det\left(\begin{bmatrix} A_{1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{l,\bullet} \\ \vdots \\ A_{l,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n,\bullet} \end{bmatrix}\right).$$

Danach ist noch 5.13(c) anzuwenden, um den Nachweis für (e) abzuschließen.

Auch **(c)** lässt sich direkt aus (L_n) ableiten. Die Herleitung bei [F, Seite 194, D2] kann unverändert auch für kommutative Ringe übernommen werden.
Für kommutative Ringe R mit der zusätzlichen Eigenschaft $[\ \forall a \in R: \quad a = -a \ \Rightarrow\ a = 0\ ]$ ergibt sich allerdings (c) direkt aus (f)! In Anwendungen kommen auch Ringe vor, bei denen die Zusatzeigenschaft nicht erfüllt ist. Ein einfaches Beispiel ist der Körper $\mathbb{Z}_2$.

Auch **(f)** kann wie folgt aus (L_n) herausgelesen werden:
Sei $B = (b_{ij}) = P_k^l \cdot A$. Dann gilt für die Einträge von B und $j \in I_n$:

$$b_{ij} = a_{ij} \text{ für } i \in I_n \setminus \{k,l\} \qquad b_{kj} = a_{lj} \qquad b_{lj} = a_{kj}$$

Ein einzelner Summand von $\det B$ sieht daher gemäß (L_n) so aus (o.E. sei $k < l$):

$$(\text{sign } \sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdots b_{k\sigma(k)}\cdots b_{l\sigma(l)}\cdots b_{n\sigma(n)} = (\text{sign } \sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{l\sigma(k)}\cdots a_{k\sigma(l)}\cdots a_{n\sigma(n)} =$$
$$(\text{sign } \sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{k\sigma(l)}\cdots a_{l\sigma(k)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \underline{(-\mathbf{1})}\cdot(\text{sign } \rho)\cdot a_{1\rho(1)}\cdots a_{k\rho(k)}\cdots a_{l\rho(l)}\cdots a_{n\rho(n)}$$

Dabei ist $\rho = \sigma \circ \tau_k^l$ und $-\text{sign } \rho = \text{sign } \sigma$. Nun muss man sich noch klar machen, dass es egal ist, ob man in (L_n) über alle Permutationen aus S_n oder über alle Permutationen aus der Menge $S_n \circ \tau_k^l := \{\sigma \circ \tau_k^l : \ \sigma \in S_n\}$ summiert. In der Tat gilt $S_n = S_n \circ \tau_k^l$.

(g) ergibt sich direkt aus (d),(e),(f), denn mit U sind auch U^{-1} und ${}^{\mathsf{t}}U$ Elementarmatrizen.
(h) fordert einen Induktionsbeweis von Ihnen.
(i) Wenn A in ZSF ist, dann ist $a_{ij} = 0$ für $i > j$, und in der Summe in (L_n) liefert allenfalls die identische Permutation einen von 0 verschiedenen Summanden. □

Der **<u>Beweis von 5.14</u>** wird in der Übungsaufgabe (25) geführt. Ein ausführliches **<u>Beispiel zu 5.15</u>** gibt es in der Vorlesung.

<u>5.16 Wichtige weitere Determinantenregeln über einem kommutativen Ring R:</u>

(a) $\det {}^{\mathsf{t}}A = \det A$ für alle $A \in R^{n\times n}$.

(b) Sei $A = \begin{bmatrix} U & V \\ 0_{n_2\times n_1} & W \end{bmatrix}$ mit $U \in R^{n_1\times n_1}$ und $W \in R^{n_2\times n_2}$, dann ist $\det A = (\det U)\cdot(\det W)$.

(c) $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$ für alle $A, B \in R^{n\times n}$.

(d) $A \in GL(n;R) \iff \det A$ invertierbar

(e) **Linearität** in Zeilen oder Spalten.
Für die Spalten etwa bedeutet dies, dass mit $u^{(1)},\ldots,u^{(n)} \in R^{n\times 1}$, $k \in I_n$, $v^{(k)} \in R^{n\times 1}$ und $\lambda \in R$ gilt:
(i) $\det\left(\left[u^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\lambda\cdot u^{(k)}},\cdots,u^{(n)}\right]\right) = \boldsymbol{\lambda}\cdot\det\left(\left[u^{(1)},\cdots,\boldsymbol{u^{(k)}},\cdots,u^{(n)}\right]\right)$
(ii) $\det\left(\left[u^{(1)},\cdots,\boldsymbol{u^{(k)}+v^{(k)}},\cdots,u^{(n)}\right]\right) =$
$\det\left(\left[u^{(1)},\cdots,\boldsymbol{u^{(k)}},\cdots,u^{(n)}\right]\right) + \det\left(\left[u^{(1)},\cdots,\boldsymbol{v^{(k)}},\cdots,u^{(n)}\right]\right)$

<u>Beweis von 5.16:</u>

(a) Der Beweis der entsprechenden Regel für Körper ([F,S.196]) ist ohne Änderung auch für kommutative Ringe gültig.

(b) Für Körper erhält man die Regel (b) mit Hilfe elementarer Umformungen direkt aus 5.13 und 5.14. (Übungsaufgabe) Für beliebige kommutative Ringe ergibt sie sich wieder direkt aus (L_n) in 5.1. Die ersten Schritte dabei sind folgende:
Wenn $A = (a_{ij})$, dann gilt nach Voraussetzung bei (b)

$$a_{ij} = 0 \text{ für } n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \text{ und } \ 1 \leq j \leq n_1 \ .$$

Ein Produkt $\prod_{i=1}^{n_1+n_2} a_{i\sigma(i)}$ kann also nur dann von 0 verschieden sein, wenn für $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$ gilt: $\sigma(i) \geq n_1 + 1$. Dann muss aber auch für $1 \leq i \leq n_1$ gelten: $\sigma(i) \leq n_1$. M.a.W.: $\sigma\big(I_{n_1}\big) = I_{n_1}$ und $\sigma\big(I_{n_1+n_2} \setminus I_{n_1}\big) = I_{n_1+n_2} \setminus I_{n_1}$. Nur über Permutationen mit diesen Zusatzeigenschaften muss in (L_n) noch summiert werden. Alle übrigen Summanden ergeben jeweils 0. Nun muss man sich noch (in wenigen weiteren Schritten) klarmachen, dass sich die verbleibende Summe tatsächlich wie gewünscht in ein Produkt aufspalten lässt.

(c) Die Produktformel ergibt sich mit Hilfe von (a),(b) und 5.13 (d),(e),(f) überraschend einfach. Mit einigen elementaren Zeilenumformungen vom Typ III lässt sich die Matrix $M := \begin{bmatrix} E_n & A \\ 0_{n\times n} & E_n \end{bmatrix}$ in die Einheitsmatrix E_{2n} umformen. M ist daher ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ III. Sei nun $N := \begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ -E_n & B \end{bmatrix}$, dann berechnet man nach 5.13(e) und mit Hilfe von (a) und (b)

$$\mathsf{det}\,\big(M \cdot N\big) = \mathsf{det}\, N = \mathsf{det}\,{}^{\mathsf{t}}N = (\mathsf{det}\, A) \cdot (\mathsf{det}\, B)$$

Zugleich ist aber $M \cdot N = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & A \cdot B \\ -E_n & B \end{bmatrix}$. Nach n^2 Zeilenvertauschungen erhält man daraus die Matrix $\begin{bmatrix} -E_n & B \\ 0_{n\times n} & A \cdot B \end{bmatrix}$ und daher mit 5.13 (d) und (f)

$$\mathsf{det}\,(M \cdot N) = (-1)^{n^2+n} \cdot \mathsf{det}\,(A \cdot B) = \mathsf{det}\,(A \cdot B) \ .$$

(d) Wir können an dieser Stelle nur die Richtung '$\Rightarrow$' lückenlos nachweisen. Diese ergibt sich aus folgenden Implikationen:

$$A \in GL(n; R) \ \Leftrightarrow \ \exists\, B \in R^{n\times n} : AB = E_n = BA$$

und

$$\exists\, B \in R^{n\times n} : AB = E_n = BA \ \Rightarrow \ \mathsf{det}\,(AB) = (\mathsf{det}\, A)(\mathsf{det}\, B) = 1 = (\mathsf{det}\, B)(\mathsf{det}\, A)$$

Der Beweis für die andere Richtung benötigt die sogenannte *komplementäre* Matrix $A^{\#}$ zu A (s.u. 5.20). Diese lässt sich unabhängig von der Invertierbarkeit von A stets bilden und mit ihr gilt:

$$A^{\#}A = AA^{\#} = (\mathsf{det}\, A)E_n \ ,$$

woraus sich direkt und insgesamt Teil (d) ergibt.

(e) Dieser Teil kann wieder direkt an (L_n) in 5.1 abgelesen werden.

5.17 Allgemeine Bemerkungen zur Determinante:

(A) **Zum axiomatischen Zugang zur Determinante:** Die Determinante ist ein wichtiges Hilfsmittel für Theorie und Anwendung. Ihre Entdeckung ist sicher eine der frühen Errungenschaften der Mathematik. Wir haben in der Vorlesung u.A. auch aus Zeitgründen die Determinante ausschließlich über die Leibniz-Formel eingeführt und dabei erste Kenntnisse über Permutationen erworben. Aus der Leibniz-Formel lässt sich 'alles' und insbesondere auch das Verhalten der Determinante bei elementaren Umformungen ableiten. Dies führt direkt zu einem effizienten Verfahren der Determinantenberechnung.

Bei diesem Zugang bleibt die Frage unbeantwortet, warum man grade diese Abbildung (von $R^{n\times n} \longrightarrow R$) betrachtet. Beim axiomatischen Zugang, der auf Leopold Kronecker (1823-1891) und Karl Weierstrass (1815-1897) zurückgeht (zitiert nach [Fu][1]) stellt man möglichst wenige geometrisch einleuchtende Eigenschaften an den Anfang, bei [F] sind dies die drei Eigenschaften *'normiert'* (5.13(a)), *'alternierend'* (5.13(c)) und *'n-fach linear'* (5.16(e)). Beim Lesen in anderen Lehrbüchern ist zu beachten, dass manchmal, anders als bei [F], der Begriff *'alternierend'* durch 5.13(f) erklärt wird. In dem Buch [W][2] sind es die drei (m.E. im Kontext der Volumenberechnung näher liegenden) Eigenschaften *'normiert'* (5.13(a)), *'homogen'* (5.16(e)(i)) und *'scherungsinvariant'* (5.13(e)). Diese Eigenschaften lassen sich im Kontext der Volumenberechnung von Parallelotopen im $\mathbb{R}^n$ motivieren. Siehe dazu weiter unten 5.18, oder [F] ab Seite 173. Aus den Grundeigenschaften werden alle weiteren Eigenschaften abgeleitet, genau so, wie wir aus (L_n) alle Eigenschaften gewonnen haben. Ein wesentlicher Unterschied ist allerdings, dass mit (L_n) ganz direkt eine Determinanten-Abbildung bereits vorliegt, was beim axiomatischen Zugang offen bleibt. Die Existenz wird in den meisten Fällen und so auch bei [F] und bei [W] mit Hilfe von (L_n) nachgewiesen. Am Ende steht dann folgendes Ergebnis:

(B) **Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Determinante:** Die nach (L_n) erklärte Abbildung $\mathsf{det} : R^{n\times n} \longrightarrow R$ ist die einzige Abbildung mit den Eigenschaften

(I) bei Fischer: *'normiert', 'alternierend'* und *'n-fach linear'*.

(II) bei Walter: *'normiert', 'homogen'* und *'scherungsinvariant'*.

In dem interessanten Buch [Fu] werden für kommutative Ringe dieselben 'Axiome' wie bei [F], an den Anfang gestellt, dann aber die Existenz einer Determinante nicht über (L_n), sonder rekursiv mit Hilfe eines sog. Entwicklungssatzes (s.u. 5.19) nachgewiesen. Interessant ist auch der weniger bekannte Zugang[3] zur Determinante als nicht konstantes ganzzahliges Polynom θ kleinsten Grades in den unbestimmten Einträgen x_{ij} der Matrix $X = (x_{ij}) \in R^{n\times n}$ mit der einzigen weiteren Eigenschaft:

$$\forall\ A, B \in R^{n\times n} : \quad \theta(AB) = \theta(A)\theta(B)$$

(C) **Wo können mir Determinanten wieder begegnen ?** Wegen ihrer hohen Komplexität vermeidet man es möglichst, größere Determinanten zu berechnen. Trotzdem sind Determinanten nicht nur innerhalb der zu unrecht sog. reinen Mathematik von großer Bedeutung. Gerade bei Anwendungen ist es oft unumgänglich zur Begründung und zum Verständnis von Verfahren, die Determinante heranzuziehen. So werden Ihnen Determinanten in der mehrdimensionalen Integration, beim Lösen von Differentialgleichungen, und in dieser LA1 in der Eigenwerttheorie begegnen. Allein im ersten Fall ist ein direkter Bezug zur Volumenberechnung gegeben. Dies waren nur drei Beispiele aus Gebieten, die Sie in Pflichtveranstaltungen antreffen werden. Leibniz hat seine Definition (L_n) im Zusammenhang mit linearen Gleichungen getroffen.

5.18 Veranschaulichung der Scherungsinvarianz der Determinante im $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
Vorlesung vom 28.11.2005

[1] Paul Fuhrmann: *A polynomial approach to linear Algebra*, Springer, 1996, wird z.B. an der Ben Gurion Universität in Israel benutzt

[2] Rolf Walter: *Einführung in die lineare Algebra*, Vieweg Verlag, 1986

[3] Cyrus Colton MacDuffee: *The theory of matrices*, Chelsea publishing, ohne Jahresangabe $\geq$ 1950, Nachdruck eines Springerbuches aus den 30-er Jahren des 20. Jhdts.