3.5 Weitere Darstellung der Auswirkungen der Multiplikation von links mit Elementarmatrizen vom Typ I, III und IV.

Seien $I_m = \{1, \ldots, m\}$ und $A \in R^{m \times n}$. Dann gilt:

I :

$$S_i(\lambda)A = \begin{bmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \lambda A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{bmatrix} \leftarrow \ i\text{-te Zeile}$$

Mit $\boldsymbol{\lambda \in G(R)}$ und $i \in I_m$. $S_i(\lambda)A$ geht aus A hervor durch Muliplikation der i-ten Zeile mit λ. Die übrigen Zeilen bleiben unverändert.

III :

$$Q_i^j(\lambda)A = \begin{bmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} + \lambda A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{bmatrix} \leftarrow \ i\text{-te Zeile}$$

für $\lambda \in R$ und $i, j \in I_m$ und $\boldsymbol{i \neq j}$. $Q_i^j(\lambda)A$ geht aus A hervor durch Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile. Die übrigen Zeilen, also auch die j-te, bleiben unverändert.

IV :

$$P_i^j A = \begin{bmatrix} \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

$P_i^j A$ entsteht aus A durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile. Die übrigen Zeilen bleiben unverändert.

3.6 Regeln für Elementarmatrizen in $\boldsymbol{R^{m \times m}}$. Seien $i, j \in I_m$, $i \neq j$.

Alle Elementarmatrizen sind invertierbar insbesondere gilt:

(a) Für $\lambda \in G(R)$:

$$S_i(\lambda)S_i(\lambda^{-1}) = E_m = S_i(\lambda^{-1})S_i(\lambda)$$

(b) Für $\lambda \in R$:

$$Q_i^j(\lambda)Q_i^j(-\lambda) = E_m = Q_i^j(-\lambda)Q_i^j(\lambda)$$

(c)

$$P_i^j = P_j^i \text{ und } (P_i^j)^2 = E_m, \text{ bzw. } (P_i^j)^{-1} = P_i^j.$$

3.7 Transposition. Zu $A = (a_{i,j}) \in R^{m \times n}$ sei die Matrix ${}^{\mathsf{t}}A = (b_{k,\ell}) \in \boldsymbol{R^{n \times m}}$ wie folgt definiert:

$$b_{k,\ell} = a_{\boldsymbol{\ell,k}} \quad \text{für} \quad \underbrace{1 \leq k \leq n}_{\text{Zeilennummer}} \quad \text{und} \quad \underbrace{1 \leq \ell \leq m}_{\text{Spaltennummer}}$$