1.5 Beweisprinzipien

1.5.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Stellen wir uns vor, wir hätten eine Schlange von Personen, die nebeneinander stehen. Also

Person 1, Person 2, Person 3, ...

Nehmen wir ferner an, jede dieser Personen hätte den Auftrag, jedes ihr bekannte Geheimnis der Person neben ihr zu erzählen. Wenn wir Person 1 ein Geheimnis erzählen, so wird dies bald allen bekannt sein.
So ungefähr funktioniert das Prinzip der vollständigen Induktion. Präzisieren wir dies nun.

Mit $\mathbb{N}_0$ hatten wir die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnet.
Sei $m \in \mathbb{N}_0$ fest gewählt, und sei $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq m$ eine Aussage.
Angenommen, wir können zeigen:

(i) Induktionsanfang: $A(m)$ ist richtig.

(ii) Induktionsschritt: Für alle $n \geq m$ folgt: Ist $A(n)$ richtig, so auch $A(n+1)$.

Das **Prinzip der vollständigen Induktion** besagt: Unter diesen Voraussetzungen ist $A(n)$ für alle $n \geq m$ richtig.

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist ein Axiom, eine unbeweisbare Grundtatsache.

Beispiele:

(a) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

Induktionsanfang: Sei $m = 0$. Für den Induktionsanfang müssen wir die Gültigkeit der Aussage $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$ beweisen. Links des Gleichheitszeichens haben wir $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = 0$ und rechts des Gleichheitszeichens ebenso. Es ist also $0 = 0$ (offenbar eine richtige Aussage), und damit gilt der Induktionsanfang.

Induktionsschritt: Für alle $n \geq m$ sei $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Zu zeigen ist, dass dies $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ impliziert.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{nach Voraussetzung} \\
&= \tfrac{n(n+1)+2n+2}{2} \\
&= \tfrac{n^2+3n+2}{2} \\
&= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Wir haben also die Aussage:

$$\text{Wenn } \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ erfüllt ist, so folgt } \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

bewiesen, und das Prinzip der vollständigen Induktion besagt, dass $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \geq 0$ gilt. □

(b) Behauptung: Sei M eine endliche Menge. Wenn $|M| = n \in \mathbb{N}_0$, so gilt $|\mathcal{P}\ (M)| = 2^n$.

Beweis:

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann ist M die leere Menge, und die Potenzmenge von M hat nur ein einziges Element, die leere Menge selbst. Es gilt also $|\mathcal{P}\ (M)| = 2^0 = 1$.

Induktionsschritt: Für jede endliche Menge mit n Elementen gelte $|\mathcal{P}\ (M)| = 2^n$. Wir müssen folgern, dass die Potenzmenge jeder Menge mit $n+1$ Elementen die Mächtigkeit 2^{n+1} hat.

Sei M eine Menge mit $n+1$ Elementen, etwa $M = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Sei U eine Teilmenge von M. Es gibt genau zwei Möglichkeiten:

1. Fall $a_{n+1} \notin U$.

Dann ist U eine Teilmenge von $M' := \{a_1, \ldots, a_n\}$, und mit der Voraussetzung gibt es 2^n Teilmengen von M', denn $|\mathcal{P}\ (M')| = 2^n$, also 2^n Teilmengen, die a_{n+1} nicht enthalten.

2. Fall $a_{n+1} \in U$.

Dann ist U von der Form $U = U' \cup \{a_{n+1}\}$, und U' ist eine Teilmenge von $M' := \{a_1, \ldots, a_n\}$. Nach Voraussetzung gibt es 2^n Möglichkeiten für U', und damit gibt es 2^n Teilmengen von M, die a_{n+1} enthalten.

Es gilt also $|\mathcal{P}\ (M)| = |\mathcal{P}\ (M')| + |\mathcal{P}\ (M')| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Die Behauptung gilt nun mit dem Prinzip der vollständigen Induktion. □

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl $n!$ wird definiert als
$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ falls $n > 0$, und
$0! = 1$.
Die Zahl $n!$ wird **n Fakultät** genannt und auch so ausgeprochen.

(c) Behauptung: Seien M und N endliche, nicht leere Mengen mit $|M| = |N| = n$. Dann gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach N.

Beweis: Wir verwenden wieder vollständige Induktion nach n. Seien $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $N = \{b_1, \ldots b_n\}$.

Wenn $n = 1$ ist, also $M = \{a_1\}$ und $N = \{b_1\}$, so gibt es genau eine bijektive Abbildung f von M nach N. Diese ist definiert durch $f(a_1) = b_1$. Die Induktionsannahme ist also richtig.

Die Voraussetzung für den Induktionsschritt ist, dass es $n!$ bijektive Abbildungen zwischen zwei Mengen mit n Elementen gibt. Seien nun $M = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ und $N = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$. Wir zählen zunächst alle bijektiven Abbildungen von M nach N, bei denen a_{n+1} auf ein festes b_k, $1 \leq k \leq n+1$ abgebildet wird. Sei $M' := \{a_1, \ldots, a_n\}$, und sei $N' := N \backslash \{b_k\}$. Jede bijektive Abbildung $f' : M' \to N'$ liefert eine bijektive Abbildung $f : M \to N$, indem wir definieren $f(a_i) = f'(a_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$, und $f(a_{n+1}) = b_k$.

Andererseits liefert jede bijektive Abbildung $f : M \to N$ mit $f(a_{n+1}) = b_k$ eine bijektive Abbildung f' von M' nach N' durch $f'(a_i) = f(a_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Da $|M'| = |N'| = n$, gibt es nach Voraussetzung $n!$ bijektive Abbildungen von M' nach N', also $n!$ bijektive Abbildungen von M nach N, die a_{n+1} auf b_k abbilden.

Für b_k gibt es $n+1$ Möglichkeiten. Es gibt also $(n+1)(n!) = (n+1)!$ bijektive Abbildungen von M nach N.

Dies beweist den Induktionsschritt, und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. $\square$