Name	Vorname	Habe das Merkblatt gelesen. Unterschrift:

Übungsgruppe	Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

Modul Lineare Algebra **Klausur 11. Februar 2006**

WiSe 2005/2006 Schmale

Zum Erreichen der vollen Punktzahl bei einer Aufgabe ist es erforderlich, Ihre Lösung korrekt aufzuschreiben und insbesondere Begründungen Ihrer Ergebnisse anzugeben.

(1) (6 Punkte) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ aus $\mathbb{Z}^{3\times 3}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} a^k & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

(2) (5 Punkte) Seien M eine nicht leere Menge und $F : M \to M$ eine Abbildung.

(a) Geben Sie die Definition der Eigenschaft ‚injektiv' für die Abbildung F wieder.

(b) Sei nun F eine injektive Abbildung. Zeigen Sie: $F \circ F$ ist ebenfalls injektiv.

(3) (6 Punkte) Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in K^{3\times 3}$ mit den Eigenschaften: (i) $A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, (ii) $A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (iii) $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(4) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$ aus $\mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) (4 Punkte) Entscheiden Sie, ob $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $w = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ im Bild der Abbildung L_A liegen.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie eine Basis von $\mathsf{Kern}\, L_A$. (Zur Kontrolle: ${}^{\mathsf{t}}[1, 4, -1] \in \mathsf{Kern}\, L_A$.)

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie eine Basis von $\mathsf{Bild}\, L_A$. (Zur Kontrolle: $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\big(\mathsf{Bild}\, L_A\big) = 2$.)

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Matrix B$=M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(L_A)$ von L_A bezüglich der Basis

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(5) (8 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **richtig** (Antwort: **ja**) oder **falsch** (Antwort: **nein**) sind. Jede richtige Antwort ergibt 2 Punkte, jede falsche -2 Punkte. Es gibt stets mindestens 0 Punkte.

(a) Je drei Untervektorräume eines Vektorraumes haben stets mindestens drei Vektoren gemeinsam. ☐

(b) Wenn das Produkt zweier Matrizen aus $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ invertierbar ist, dann stets auch jede der beiden Matrizen. ☐

(c) Wenn die Richtungen zweier affiner Unterräume gleich sind, dann müssen auch die zugehörigen affinen Unterräume Punkte gemeinsam haben. ☐

(d) Wenn die Determinante einer Matrix A aus $\mathbb{Q}^{4\times 4}$ nach Multiplikation der zweiten Zeile mit 2 denselben Wert liefert wie zuvor, dann muss dieser Wert 0 sein. ☐

1 (6P)	2 (5P)	3 (6P)	4 (15P)	5 (8P)	$\sum$ (40P)	Punkte für Übungen	**Punkte gesamt**	**Note**