Name	Vorname	Habe das Merkblatt gelesen. Unterschrift:

Übungsgruppe	Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

1 (7 P)	2 (8 P)	3 (6 P)	4 (7 P)	5 (14 P)	6 (6 P)	7 (12 P)	$\sum$ (60 P)	Punkte Übungen	**Punkte gesamt**	**Note**

Modul Lineare Algebra **Klausur 3. März 2006**

WiSe 2005/2006 Schmale

Zum Erreichen der vollen Punktzahl bei einer Aufgabe ist es erforderlich, Ihre Lösung korrekt aufzuschreiben und insbesondere Begründungen Ihrer Ergebnisse anzugeben.

(1) Seien R ein kommutativer Ring und $A \in R^{m\times n},\ B \in R^{n\times m}$.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach k:

$$\big(AB\big)^k = A\big(BA\big)^{k-1}B \quad \text{für } k \geq 1.$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Einträge der Matrix $\big(AB\big)^{10}$ im Spezialfall

$$A = {}^{\mathsf{t}}\big[a\ ,\ b,\ c\big]\,, B = \big[a\ ,\ b\ ,\ c\big] \quad \text{mit} \quad a^2+b^2+c^2 = 1.$$

(2) Sind folgende Teilmengen M jeweils ein Untervektorraum des umgebenden Vektorraumes V?

(a) (4 Punkte) $M = \{v \in \mathbb{R}^{3\times 1} :\ \| v \| \geq \| {}^{\mathsf{t}}\big[1\ ,\ 1\ ,\ 1\big] \|\}$, $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$. Dabei sei die Länge $\| v \|$ z.B. bezüglich des Standardskalarprodukts berechnet. Auf das spezielle Skalarprodukt kommt es aber nicht an.

(b) (4 Punkte) $M = \{v \in \mathbb{Z}_2^{3\times 1} :$ die Anzahl der Einträge $\neq 0$ in v ist gerade $\}$.
Dabei ist $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ ein Körper mit zwei Elementen und auch 0 wird als gerade Zahl betrachtet.

Ist Ihre Antwort Ja, dann sind die Untervektorraumeigenschaften nachzuweisen, und wenn Ihre Antwort Nein ist, dann ist eine Untervektorraumeigenschaft anzugeben, welche verletzt ist, zusammen mit einem Gegenbeispiel.

(3) (6 Punkte) Seien $V = \mathbb{Q}^{4\times 1}, W = \mathbb{Q}^{3\times 1}$ und $\mathcal{A} = \big(e^{(1)}, e^{(2)}\big)$ mit $e^{(1)} = {}^{\mathsf{t}}\big[1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\big]$, $e^{(2)} = {}^{\mathsf{t}}\big[0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\big]$ eine Basis des Untervektorraums U von V.
Geben Sie eine lineare Abbildung $L:\ V \longrightarrow W$ an, bei der $\mathsf{Kern}\, L = U$.
Es genügt nicht, ein L nur anzugeben. Es muss auch begründet werden, dass in Ihrem Beispiel $\mathsf{Kern}\, L = U$ ist.

(4) Sei $L : V \longrightarrow V$ eine invertierbare lineare Abbildung des K-Vektorraums V und u ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ von L. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) u ist Eigenvektor zum Eigenwert $c\lambda$ von cL für beliebige $c \in K \setminus \{0\}$.
Dabei ist cL die lineare Abbildung mit $(cL)(v) = c\big(L(v)\big)$ für $v \in V$.

(b) (2 Punkte) u ist Eigenvektor zum Eigenwert λ^2 von $L \circ L$.

(c) (3 Punkte) u ist Eigenvektor zum Eigenwert λ^{-1} von L^{-1}. (Tipp: L^{-1} anwenden!)

!! Bitte wenden !! Es folgen weitere Aufgaben !!

(5) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie eine Basis von $\mathsf{Kern}\, L_A$.

(b) (3 Punkte) Entscheiden Sie, ob ${}^{\mathsf{t}}\big[1\ ,\ 1\ ,\ 1\big] \in \mathsf{Bild}\, L_A$.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie $L_A^{-1}\big({}^{\mathsf{t}}\big[1\ ,\ -1\ ,\ -1\big]\big)$.

(d) (4 Punkte) Ist L_A diagonalisierbar als Matrix aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

(6) (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine orthogonale Basis des Spaltenraumes von A aus der vorangehenden Aufgabe bezüglich des Standardskalarproduktes.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von ${}^{\mathsf{t}}\big[1\ ,\ 1\ ,\ 1\big]$ auf den Spaltenraum von A.

(7) (12 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **richtig** (Antwort: **ja**) oder **falsch** (Antwort: **nein**) sind. Jede richtige Antwort ergibt 2 Punkte, jede falsche -2 Punkte. Es gibt stets mindestens 0 Punkte.

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es gelte $\mathsf{dim}_V = n \geq 2$.

(a) Sei $m \geq 2$. Ist $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Familie linear abhängiger Vektoren aus V, dann lässt sich stets v_m als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{m-1}$ schreiben. ☐

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $\mathsf{Rang}\,(A) = 2$. Dann hat A mindestens eine Nullzeile. ☐

(c) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $\mathsf{Rang}\, A = \mathsf{Rang}\, B = n$. Dann gilt $\mathsf{Rang}\,(A \cdot B) = n$. ☐

(d) Jede Summe von zwei Elementarmatrizen aus $K^{n\times n}$ ist invertierbar. ☐

(e) Sei 0 Eigenwert von $A \in K^{n\times n}$. Dann ist A nicht invertierbar. ☐

(f) Seien dann $\Gamma := v + U$ und $\Gamma' := v' + U'$ zwei $(n-1)$-dimensionale affine Unterräume von V. Außerdem sei $v = v'$ und $U \neq U'$. Dann gilt $\Gamma \vee \Gamma' = V$. ☐

Viel Erfolg !