Modul Lineare Algebra **9. Jauar 2006**

WiSe 2005/2006

Schmale

Klausuraufgabenbeispiele

Die folgenden Aufgaben stammen aus zurückliegenden Klausuren und Beispielklausuren. Ihre Klausuraufgaben werden zu einem großen Teil ähnlich und z.T. etwas kürzer sein. Bitte denken Sie daran, wenn Sie ihre Lösungen ausarbeiten, dass später in der Klausur wie bisher eine schlüssige und fachsprachlich korrekte Darstellung notwendig ist. Die folgenden Aufgaben würden unterschiedliche Punktzahlen haben.

(1) Sei K ein Körper, zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach k, dass für $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$ und alle $k \geq 0$ gilt:

$$A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & a^{k+1}b^k \\ a^k b^{k+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Anleitung: $A^{2(k+1)+1} = (?) \cdot A^{2k+1}$

(2) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n und für $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

(3) Seien M, N nichtleere Mengen und $F : M \longrightarrow N, G : N \longrightarrow M$ Abbildungen.
Behauptung:

$$F \circ G = \mathsf{id}_N \quad \Rightarrow \quad F \text{ surjektiv und } G \text{ injektiv}$$

(4) Eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn ${}^{\mathsf{t}}A = A$. Bestimmen Sie zwei invertierbare symmetrische Matrizen $A, B \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$, so dass AB nicht symmetrisch ist. Geht das auch in $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$?

(5) Liegt der Vektor $[i, i, i]$ im Zeilenraum von $\begin{bmatrix} i & -i & i \\ 1+i & 1-i & 1 \end{bmatrix}$?

(6) Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

(a) Ist $A \in GL(3, \mathbb{Z})$?

(b) Sind die Zeilen von A $\mathbb{Z}$-linear unabhängig ?

(c) Sind die Spalten von A $\mathbb{Q}$-linear unabhängig ?

(7) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix aus $\mathbb{C}^{3\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 1-i & 2 \\ i & 1-i & -3 & -2-2i \\ i & 1+i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(8) Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}^4$ und die lineare Abbildung

$$F : V \longrightarrow V, \quad {}^{\mathsf{t}}(a,\, b,\, c,\, d) \longmapsto {}^{\mathsf{t}}(d,\, a,\, b,\, c).$$

Außerdem seien $\mathcal{K} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die kanonische Basis von V und $\mathcal{B}$ die Basis

$$\mathcal{B} := (v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4) := \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Matrizen
(a) $M^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}(F)$, $M^{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}(F)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(F)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$,
(b) $M^{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}(\mathsf{id}_V)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathsf{id}_V)$.
[Hinweis: Der Rechenaufwand ist sehr klein. Alle notwendigen Linearkombinationen lassen sich “durch Hinsehen” finden.]

(9) Seien M, N nichtleere Mengen und $F : M \longrightarrow N, G : N \longrightarrow M$ Abbildungen.
Behauptung:

$$F \circ G = \mathsf{id}_N \quad \Rightarrow \quad F \text{ surjektiv und } G \text{ injektiv}$$

Die folgenden unvollständigen Beweispartikel, mögen als Anleitung dienen zum Aufschreiben eines vollständigen Beweises der Behauptung.
Surjektivität von F: $n \in N$, $m := G(n)$, $F(m) =$
Injektivität von G:

(10) Sei K ein Körper und $F : K^n \longrightarrow K$ eine lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist. Zeigen Sie: F ist surjektiv. (Dies ist direkt oder mit Hilfe von Sätzen der Vorlesung möglich.)

(11) Geben Sie eine Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ an derart, dass gilt:
(i) $\det A \neq 0$ und (ii) $L_A : \mathbb{Z}^{2\times 1} \to \mathbb{Z}^{2\times 1}$ ist nicht surjektiv

(12) Bestimmen Sie $F^{-1}(w)$ für die lineare Abbildung $F : \mathbb{Q}^{2\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}$ mit $F = L_A$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ und zwar

(a) für $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(b) $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

(c) $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(13) Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gelte für alle $i, j \in I_n$: $a_{ij} > 0$ und $b_{ij} > 0$. Zeigen Sie:
Alle Einträge des Produktes AB der beiden Matrizen sind positiv.

(14) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix aus $\mathbb{C}^{2\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2i & 1+i & 1-i \\ 2 & 1-i & -1-i \end{bmatrix}$$

(15) Stellen Sie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ dar als Produkt von Elementarmatrizen (aus $\mathbb{Q}^{2\times 2}$).

(16) Seien $v = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ und $u = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{Q}^{4\times 1}$ und sei $\Gamma = v + \langle u \rangle_{\mathbb{Q}}$.

(a) Zeigen Sie: $\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} \in \Gamma$.

(b) Zeigen Sie: $\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix} \notin \Gamma$.

(17) Sei $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{3\times 3}$.
Weisen Sie nach, dass A invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

(18) Sei U ein Untervektorraum des K-Vektorraums V und seien $u \in U$ und $v \in V \setminus U$. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von V ?
(i) $u + U$ (ii) $U + (V \setminus U)$ (iii) $v + U$ (iv) $(v + U) \setminus \{v\}$ (v) $\langle v + U \rangle_K$
Antworten Sie nur mit **ja** oder **nein**. Jede richtige Antwort ergibt x Punkte und jede falsche Antwort -x Punkte (x=...). Allerdings gibt es auf jeden Fall mindesten 0 Punkte.

(19) Seien $A = \begin{bmatrix}6 & -4 & 4\\-2 & 4 & -2\\-8 & 8 & -6\end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $F : \mathbb{Q}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{Q}^{3\times 1}$ die lineare Abbildung mit $F(v) = Av$ für v aus $\mathbb{Q}^{3\times 1}$, kurz: $F = L_A$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathsf{Bild}\, F$.
(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ an, der nicht im Bild von F liegt.
(c) Bestimmen Sie den Kern von F.
(Ergebnis: $\langle {}^{\mathsf{t}}[-2, 1, 4] \rangle_{\mathbb{Q}}$)
(d) Geben Sie zwei verschiedene Vektoren w_1, w_2 an derart, dass $F(w_1) = F(w_2) \neq 0$.
(e) Bestimmen Sie $F^{-1}(w)$ für $w = \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$.
(f) Mit $u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ sei $U = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{Q}}$. Bestimmen Sie eine Basis von $F(U)$.
(g) Sei $\mathcal{A}' = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'}(F)$.

(20) Geben Sie eine Matrix $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ an derart, dass der Vektor $b = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ nicht im Bild ($\mathsf{Bild}\, L_A$) der zugehörigen linearen Abbildung $L_A : \mathbb{Z}^{2\times 1} \to \mathbb{Z}^{2\times 1}$ liegt und zugleich $\det A \neq 0$ und $abcd \neq 0$ sind. (Begründung nicht vergessen.)

(21) Zu $n \in \mathbb{N}_+$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$\mu(A) := \max\{|a_{ij}| \ : \ 1 \leq i, j \leq n \ \}.$$

Zeigen Sie: Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\mu(AB) \leq n \cdot \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Folgende für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und alle $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ gültigen Regeln dürfen Sie beim Beweis benutzen:
(i) $\left| \sum_{i=1}^n c_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i|$
(ii) Wenn $|c_i| \leq |d_i|$ für $1 \leq i \leq n$, dann $\sum_{i=1}^n |c_i| \leq \sum_{i=1}^n |d_i|$.

(22) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 5} \quad \text{und } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathsf{Lös}\,(A, 0)$.
(b) Bestimmen Sie $\mathsf{Lös}\,(A, b)$.
(c) Geben Sie jeweils eine Basis des Zeilenraums und des Spaltenraums von A an.

(23) Seien $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $u' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{Q}^{3\times 1}$, $s \in \mathbb{Q}$ und seien $\Gamma = sv + \langle u \rangle_{\mathbb{Q}}, \Gamma' = v' + \langle u' \rangle_{\mathbb{Q}}$. Bestimmen Sie, falls möglich, eine Zahl $s \in \mathbb{Q}$ so, dass die beiden Geraden sich schneiden.

(24) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n\times n}$. Beantworten Sie die Folgenden Fragen. Antworten Sie nur mit **ja** oder **nein**. Jede richtige Antwort ergibt x Punkte und jede falsche Antwort -x Punkte (x=...). Allerdings gibt es auf jeden Fall mindesten 0 Punkte. **Vorsicht!** Es ist besser, nur eine Frage richtig zu beantworten, als zwei richtig und zwei falsch.

(a) Wenn $\mathsf{Rang}\, A = n$, dann ist $\mathsf{Lös}\,(A, 0) \neq \{0\}$.
(b) Wenn $\mathsf{Lös}\,(A, b) \neq \varnothing$ für alle $b \in K^{n\times 1}$, dann ist $\mathsf{Rang}\, A = n$.
(c) Wenn $\mathsf{Rang}\, B = n$, dann ist $\mathsf{Rang}\, AB = \mathsf{Rang}\, A$.
(d) Wenn $\mathsf{Rang}\, A = n$, dann ist $\mathsf{Rang}\, AB = \mathsf{Rang}\, A$.
(e) Wenn $\mathsf{Rang}\, A < \mathsf{Rang}\, B$, dann ist $\mathsf{Rang}\, AB = \mathsf{Rang}\, A$.
(f) Wenn $\mathsf{Rang}\, A < \mathsf{Rang}\, B$, dann ist $\mathsf{Rang}\, AB < \mathsf{Rang}\, B$.

(25) Sei $V = \mathbb{Q}^{3\times 1}$ und sei weiter $F := V \longrightarrow V$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift:

$$F(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) := \begin{bmatrix} 8x - 3y + z \\ 7x - 2y \\ 5y - z \end{bmatrix} \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Sei $\mathcal{K}$ die kanonische Basis und $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ eine weitere Basis von V.

(a) Zeigen Sie: F ist linear.
(b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(F)$.
(c) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$.