1.14 Summenschreibweise :
Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_1, \ldots, a_n \in R$. Wir definieren

$$\sum_{j=1}^{n} a_j := a_1 + \cdots + a_n =: \sum_{1 \le j \le n} a_j$$

Es gelten folgende Regeln:
(1) Mit $\lambda \in R$ gilt:

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_j) \quad \text{und} \quad (\sum_{j=1}^{n} a_j)\lambda = \sum_{j=1}^{n} (a_j \lambda)$$

(2) Seien auch $b_1, \ldots, b_n \in R$. Es gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)$$

(3) Sei auch $r \in \mathbb{N}_+$ und $G = (g_{jk}) \in R^{n \times r}$. Es gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{r} g_{jk}) = \sum_{k=1}^{r} (\sum_{j=1}^{n} g_{jk})$$

Die Klammern lässt man dabei meist weg. Da es auf die Reihenfolge der Summanden ja nicht ankommt, schreibt man auch einfach:

$$\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le r}} g_{jk} \quad \text{oder sogar nur} \quad \sum G.$$

Die Regel **(3)** wird z.B. durch vollständige Induktion nach r bewiesen. Sie begründet u.A., dass die beiden Maple-Anweisungen

$$add(add(g[j,k], k = 1..n), j = 1..m); \quad \text{und} \quad add(add(g[j,k], j = 1..n), k = 1..m);$$

zum selben Ergebnis führen (ähnlich bei Mathematica, MuPad, Derive, etc).

Abschluss des Beweises von 1.13 (b):
Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
(i,l) - \text{Eintrag von } DC &= \sum_{k=1}^{r} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}) c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl}) \\
&= (i,l) - \text{Eintrag von } AF
\end{aligned}$$

Dabei wurde für die zweite und vierte Gleichung 1.14(1) benutzt und für die dritte Gleichung 1.14(3) mit der Matrix

$$G = \big(a_{ij} b_{jk} c_{kl}\big)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le r}}.$$