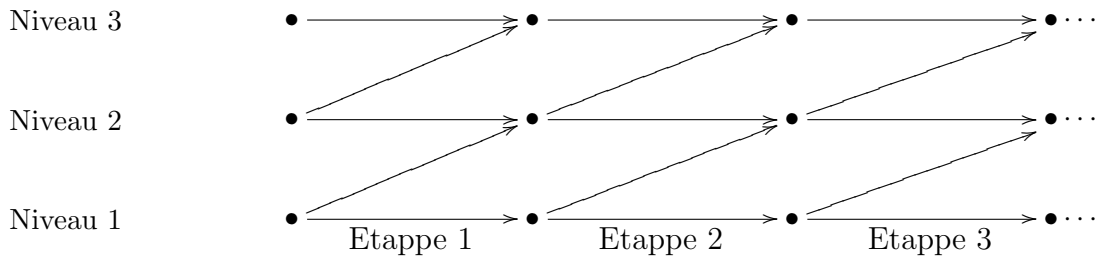
Modul Lineare Algebra **17. Oktober 2005**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 1

(1) Das folgende gleichförmige unbegrenzte Netzwerk werde betrachtet:



Sei $a_{ij}^{(n)}$ die Anzahl der Wege über n Etappen vom Niveau i zum Niveau j ausgehend von einem festen Ausgangspunkt. So ist z. B. $a_{ii}^{(n)} = 1$ für alle $n \geq 1$ und $a_{12}^{(2)} = 2$ und $a_{21}^{(3)} = 0$.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Formel $a_{12}^{(n)} = n$ für alle $n \geq 1$.

(b) Finden Sie eine Formel für $a_{13}^{(n)}$ und beweisen Sie sie durch vollständige Induktion.

(2) Seien $M = \mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : \ q > 0\}$, $f \in \mathsf{Abb}\,(M, M)$ und gelte für $x \in M$:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(a) Zeigen Sie: f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$f^{\textcircled{n}}(x) = \frac{x}{nx+1}$$

für alle $n \geq 1$ und alle $x \in M$.
Bemerkung: Ein ganz anderes Ergebnis erhält man mit dem Funktionsausdruck $\frac{x+1}{x}$. Es treten dann die sogenannten Fibonaccizahlen auf.

(3) Zu $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \{\alpha a + \beta b : \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

$$\langle 1, \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle 1, 1 + \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Wichtig:
Geben Sie Ihre Bearbeitung handschriftlich ab. Schlecht lesbare Bearbeitungen können nicht gewertet werden. In Ihren Bearbeitungen der ersten drei Aufgaben, sollen keine Quantoren und Folgepfeile benutzt werden. Bilden Sie nur vollständige Sätze! Symbole wie etwa "$\in, \subseteq, \cap$" sind erlaubt, aber bei diesen Aufgaben nicht unbedingt notwendig. Fassen Sie sich trotzdem so kurz wie möglich. Auch in Tutorien zur Vorbereitung der Aufgaben gelten dieselben Regeln für den abschließenden Tafelanschrieb.