Aufgabenblatt 10

(28) ([1]) Der Vektor $v \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$ besitze bezüglich der Basis

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, v^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, v^{(3)} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, v^{(4)} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$$

den Koordinatenvektor $x = \begin{bmatrix}3\\5\\-2\\1\end{bmatrix}$. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor x' von v bezüglich der Basis

$$v^{(1)'} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix}, v^{(2)'} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}, v^{(3)'} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix}, v^{(4)'} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Dabei sind die Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(4)'}$ bezüglich der Standardbasis gegeben.

(29) Seien R ein kommutativer Ring und V, W R-Moduln.

(a) Welche der folgenden Abbildungen $F: V \longrightarrow W$ sind R-linear?
(i) $R = \mathbb{Z},\ V = \mathbb{Z}^3, W = \mathbb{Z},\ F(q_1, q_2, q_3) = q_1 + 2q_2 + 3q_3$,
(ii) $R = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^2 = W,\ F(r, s) = (\min(r, s),\ \max(r, s))$,
(iii) $V = R^{\mathbb{N}} = W, F\big((a_k)_{k\geq 0}\big) = (a_{2k})_{k\geq 0}$.

(b) Welche der Abbildungen in (a)(i) und (a)(iii) sind surjektiv, welche sind injektiv?
Stellen Sie jeweils eine Behauptung auf und beweisen Sie diese.
Zusatz: Wie sieht es bei folgenden Abbildungen aus?

(c) $n \in \mathbb{N}_+, V = R^{n\times n} = W, M \in R^{n\times n}$ fest vorgegeben, $F(A) = MA - AM$,

(d) $R = \mathbb{Z}, V = W = \mathbb{Q}, F(q) = (\lfloor q\rfloor + \lceil q\rceil)\cdot\frac{1}{2}$,

(e) $R = \mathbb{R} = W, V = \{f \in \mathsf{Abb}([0,1],\mathbb{R}) :\ f$ Riemann-integrierbar $\}$, $g \in V$ fest vorgegeben, $F(f) = \int_0^1 g(t)^2 f(t)\,\mathsf{dt}$,

(f) Im Kontext der Aufgabe (15) sei $F: R^{2m\times 1} \to R^{n\times 1}$ die Abbildung, die zu $u^{(1)}, u^{(2)} \in R^{m\times 1}$ den Zustand $F(u^{(1)}, u^{(2)})$ angibt, der ausgehend von 0 in zwei Schritten mit Hilfe der Eingabevektoren $u^{(1)}, u^{(2)}$ erreicht wird.

(30) ([1]) Die Lineare Abbildung $F: \mathbb{Q}^{3\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}$ werde bezüglich der Basen

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, v^{(2)} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, v^{(3)} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{Q}^{3\times 1} \text{ und } w^{(1)} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, w^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{Q}^{2\times 1}$$

durch die Matrix $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}$ dargestellt.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung für F bezüglich der neuen Basen

$$\widetilde{v}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \widetilde{v}^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \widetilde{v}^{(3)} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{Q}^{3\times 1} \text{ und } \widetilde{w}^{(1)} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \widetilde{w}^{(2)} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{Q}^{2\times 1}$$

.....

[1] Diese Aufgabe stammt aus einem Skript zur Ingenieurmathematik der Universität Hamburg.
Anleitungen und Beispiele gibt es in der Vorlesung und in den Übungen.