Modul Lineare Algebra **16. Januar 2006**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 11

(31) Seien K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times(n-m)}$ und es gelte $\mathsf{Rang}\, A = m$, $\mathsf{Rang}\, B = n - m$ und $AB = 0$. Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{Kern}\, L_A = \mathsf{SR}\,(B)$.

(b) $\mathsf{Kern}\, L_{\mathrm{t}_B} = {}^{\mathrm{t}}\mathsf{ZR}\,(A)$.

Hinweis: Benutzen Sie u. a. die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

(32) Sei K ein Körper, $M \in K^{2\times 2}$ und $L:\ K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}$ erklärt durch die Vorschrift $L(X) = MX$ für $X \in K^{2\times 2}$. Schreibweise $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: L ist linear.

(b) Sei $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $\mathsf{Kern}\, L$ und $\mathsf{dim}_K\big(\mathsf{Bild}\, L\big)$.

(c) Sei $\mathcal{K} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis von $K^{2\times 2}$. Bestimmen Sie $M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}\big(L\big)$.

Zusatz: .... das gleiche für $L(X) = MX - XM$ und $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(33) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ aus $\mathbb{Q}^{2\times 3}$.

Bestimmen Sie für die entsprechenden linearen Abbildungen $L_A, L_B:\ \mathbb{Q}^{3\times 1} \to \mathbb{Q}^{2\times 1}$ und $w^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(a) $L_A^{-1}(w^{(1)})$ und $L_B^{-1}(w^{(2)})$,

(b) $L_A^{-1}(w^{(1)}) \cap L_B^{-1}(w^{(2)})$

Zusatz: Noch zwei Testaufgaben[1] Sei $L:\ \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ eine lineare Abbildung.

(a) Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = \Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Big)$ gelte $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\big(L\big) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie $L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.

(b) Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = \Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big)$ gelte $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\big(L\big) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie $M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}\big(L\big)$.

.....

[1] Quelle wie bei Aufgabe (27). Ca 50% der Studierenden einer allerdings kleinen Stichprobe konnten solche Aufgaben zu Beginn des 2. Semesters nicht korrekt lösen, und Sie ??