Modul Lineare Algebra **23. Januar 2006**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 12

(34) Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\mathsf{dim}_K V = n \geq 2$ und Γ, Γ' zwei affine Unterräume von V.
Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass Γ, Γ' Hyperebenen und nicht parallel sind:
(a) $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$,
(b) $\mathsf{dim}_K\big(\Gamma \cap \Gamma'\big) = n - 2$.

Anleitung zu (a): Gibt es $u \in U, u' \in U'$ derart, dass $v + u = v' + u'$ bzw. $v - v' = -u + u' \in U + U'$? Zu (b): Satz 9.10 (a)(i).

(35) Beweisen Sie Satz 9.10 (a) (ii) direkt und ohne (iii) zu benutzen.

Anleitung: Zeigen Sie $\Gamma \cup \Gamma \subseteq v + \big(U + U'\big)$, (vgl. Anleitung zu Aufgabe (34)(a)). Sei etwa $\Gamma \vee \Gamma' = w + W$. Warum kann $w = v$ oder $w = v'$ gewählt werden? Folgern Sie $U \subseteq W$ und $U' \subseteq W$, $v + \big(U + U'\big) \subseteq \Gamma \vee \Gamma'$. Und Jetzt ?

(36) Sei $K = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit 2 Elementen 0,1. Im Vektorraum $K^{5\times 1}$ seien

$$v = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, w^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, w^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, w^{(3)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, W = \langle w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}\rangle_K$$

und $\Gamma = v + W$.

Außerdem seien $A = \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ und $\Delta = \mathsf{Lös}\,(A, b)$.

Bestimmen Sie $\Gamma \cap \Delta$ und $\Gamma \vee \Delta$ als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems oder in Parameterdarstellung.