Modul Lineare Algebra **30. Januar 2006**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 13

(37) Sei $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Entscheiden Sie durch eigene dokumentierte Berechnung aufbauend auf § 10 der Vorlesung (ggf. genaue Zitate), ob A diagonalisierbar ist und zwar für $K = \mathbb{Q}$ und für $K = \mathbb{C}$.

(38) (a) Bestimmen Sie im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^{4\times 1}$ versehen mit dem Standardskalarprodukt mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens der Vorlesung eine orthogonale Basis (w_1, w_2, w_3) des Untervektorraums

$$W = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$

(b) Ergänzen Sie die in (a) gefundene Basis zu einer orthogonalen Basis von V.

(39) Sei $V = \{f \in \mathsf{Abb}\,([-1\,,\,1], \mathbb{R}) : \ f \text{ stetig}\}$ der reelle Vektorraum der im abgeschlossenen Intervall $[-1\,,\,1]$ stetigen Funktionen und $\beta : \ V \times V \to V$ die Abbildung mit der Vorschrift $\beta(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathsf{dt}$. β ist ein Skalarprodukt (Übungsaufgabe für Analysis 1).

(a) Geben Sie $f, g \in V \setminus \{0\}$ an derart, dass $\beta(f,g) = 0$.

(b) Orthogonalisieren Sie die linear unabhängige Familie $\left(f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}\right)$, wobei $f^{(k)}(t) = t^k$ für $0 \le k \le 2$.

Zusatzaufgaben:

(A) Seien K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $v \in \mathsf{Eig}\,(BA, \mu)$, dann ist $Av \in \mathsf{Eig}\,(AB, \mu)$.

(b) $\sigma_K(BA) = \sigma_K(AB)$.

Anleitung: Eventuellen Eigenwert 0 getrennt behandeln, Rangbetrachtung.

(B) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^{3\times 1} \setminus \{0\}$ derart, dass alle drei Einträge von A^k für $k \to \infty$ betragsmäßig beschränkt bleiben ?

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und gelte für $i, j \in I_3$: $|a_{ij}| \le \alpha$ und $|w_i| \le \beta$. Dann sind die Einträge von Aw betragsmäßig $\le 3\alpha\beta$.

(b) $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$ für $k \ge 0$ (vollständige Induktion nach k).

(c) Seien $u \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $P \in GL(3, \mathbb{R})$ und $w^{(k)} = {}^{\mathsf{t}}[w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, w_3(k)] = \left(P^{-1}AP\right)^k u$. Außerdem sei für $i \in I_3$, für ein $\gamma \in \mathbb{R}_+$ und für $k \ge 0$: $|w_i^{(k)}| \le \gamma$. In Worten:
Die Einträge von $\left(\left(P^{-1}AP\right)^k u\right)$ *bleiben betragsmäßig beschränkt für* $k \to \infty$.
Zeigen Sie:
Dann bleiben auch die Einträge von $\left(A^k(Pu)\right)$ betragsmäßig beschränkt für $k \to \infty$.

Nun soll die eingangs gestellte Frage mit Hilfe des Spektrums von A und Sätzen aus §10 beantwortet werden.
(Rechenhilfe: -2 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.)