Modul Lineare Algebra **24. Oktober 2005**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 2

(4) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Abbildung mit $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ für $x \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie

(a) Es gibt eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$.
(b) Es gibt eine Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $f \circ h = id_{\mathbb{N}}$ und $g \neq h$.

Zusatz(freiwillig):
Es gibt keine Abbildung $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $k \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

(5) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $f(x, y) = 2x - y$.

Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0, 1\})$. (Es ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ anzugeben und zu zeigen, dass $M = f^{-1}(\{0, 1\})$.)

Versuchen Sie, M zu skizzieren.

(6) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \; B := \begin{bmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 3 & 8 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \; C := \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie mindestens drei verschiedene Produkte aus je zwei der drei Matrizen A, B und C.
Bitte benutzen Sie keine gemischten Brüche, sondern nur zusammengefasste und dann ggf. gekürzte Brüche als Einträge in Ihren Ergebnissen.

(b) Seien

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A := \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 4}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie das Produkt QA. Beschreiben Sie den Effekt der Multiplikation von links mit Q an die Matrix A.

(c) Finden Sie (durch Überlegen) eine Matrix $Q \in M(3 \times 3; \mathbb{Q})$, so dass für alle Matrizen $A \in M(3 \times 4; \mathbb{Q})$ die Gleichung

$$QA = \begin{bmatrix} A_{1\bullet} + 5A_{2\bullet} \\ A_{2\bullet} \\ A_{3\bullet} \end{bmatrix}$$

gilt.