Modul Lineare Algebra **1. November 2005**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 3

(7) Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $M := \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass M^n, das n-fache Produkt von M mit sich selbst, die folgende Form hat:

$$M^n = \begin{bmatrix} 1 & f_n & g_n \\ 0 & 1 & f_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei

$$f_1 = a, \quad g_1 = 0$$

$$\text{und für } \; n \geq 1 \; : \quad f_{n+1} = a + f_n \quad \text{und} \quad g_{n+1} = af_n + g_n$$

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für die Größen f_n und g_n aus (a) gilt:

$$f_n = na \quad \text{und} \quad g_n = \frac{n(n-1)}{2}\, a^2 \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

Bemerkung: Für $a = 1$ gibt es einen direkten Zusammenhang mit Aufgabe (1).

(8) Seien $n \in \mathbb{N}_+$, und $\mathcal{S}$ die Menge der sogenannten stochastischen $n \times n$-Matrizen.
Eine $n \times n-$Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt stochastisch,wenn gilt:
(i) $a_{i,j} \geq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$
(ii) $a_{i,1} + \cdots + a_{i,n} = 1$ $\left(\text{oder mit dem Summenzeichen: } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\right)$
Zeigen Sie: Für $A, B \in \mathcal{S}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt:

$$\lambda A + \mu B \in \mathcal{S} \text{ und } A \cdot B \in \mathcal{S}$$

Zusatz: Betrachten Sie die Menge $\mathcal{Z}$ der reellen $n \times n$-Matrizen mit konstanter Zeilensumme und verallgemeinern Sie (i),(ii) entsprechend.

(9) (a) Im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sei $u = \frac{1}{2}(1 + i)$. Berechnen Sie u^k für $1 \leq k \leq 8$. Machen Sie eine Zeichnung, um die Lage der entsprechenden Punkte in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) zu veranschaulichen. Bestimmen Sie eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$ so, dass die komplexen Zahlen $\big(\lambda(1 + i)\big)^k$ für $k \geq 1$ als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ alle die gleiche Länge haben.

(b) Beweisen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation für komplexe Zahlen.

Wichtig (Wiederholung für den Beginn des ‚Normalbetriebs'):
Geben Sie Ihre Bearbeitung handschriftlich ab. Schlecht lesbare Bearbeitungen können nicht gewertet werden. In Ihren Bearbeitungen sollen vorerst keine Quantoren und Folgepfeile o.Ä. benutzt werden. Bilden Sie nur vollständige Sätze! Sagen Sie, was Sie vor haben, bevor Sie es tun. Fassen Sie sich trotzdem so kurz wie möglich. Auch in Tutorien zur Vorbereitung der Aufgaben gelten dieselben Regeln für den abschließenden Tafelanschrieb.