Modul Lineare Algebra **7. November 2005**
WiSe 2005/2006
Schmale

# Aufgabenblatt 4

**(10)** Seien $R$ ein kommutativer Ring und $l, m, n, p, N \in \mathbb{N}_+$. Seien $A \in R^{l\times m}, B \in R^{m\times n}, C \in R^{n\times p}$. Die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ ergeben nach dem Assoziativgesetz die selbe Matrix $P \in R^{l\times p}$. Der Rechenaufwand ist aber i. Allg. nicht von der Klammersetzung unabhängig.

(a) Ermitteln Sie die Anzahl der Multiplikationen die zur Berechnung des Produktes $AB$ nach der Definition in der Vorlesung notwendig sind. Begründen Sie Ihr Ergebnis. [a]

(b) Sei $\lambda$ die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung von $P$ in der Reihenfolge $(AB)C$ und $\mu$ diejenige in der Reihenfolge $A(BC)$. Zeigen Sie

$$\frac{\lambda}{lmnp} = \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{lmnp} = \frac{1}{l} + \frac{1}{n}\,.$$

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Unterschied zwischen $\lambda$ und $\mu$ „groß“ ist.
<u>Zusatz:</u> Was ist der größtmögliche Unterschied $|\lambda - \mu|$ zwischen $\lambda$ und $\mu$, wenn $l, m, n, p \leq N$?

**(11)** Sei $M$ die Menge aller reellen $4 \times 4$-Matrizen $A = (a_{ij})$, die den folgenden Bedingungen genügen: $a_{1j} = a_{i1} = a_{4j} = a_{i4} = 0$ für $1 \leq i, j \leq 4$.
Machen Sie sich zunächst klar, wie diese Matrizen aussehen, und geben Sie ein typisches Beispiel an. Zeigen Sie dann:

(a) Mit $A, B \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch $A + B, A \cdot B$ und $\lambda A$ wieder aus $M$.

(b) $M$ ist ein Ring bezüglich $+$, $\cdot$. Beachten Sie (Arbeitsersparnis), dass viele Regeln bereits für <u>alle</u> Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ gelten. Bei korrektem Verweis auf die entsprechende Regel in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ erübrigt sich ihr Nachweis für $M$.

<u>Zusatz:</u> Seien $R$ ein kommutativer Ring, $I_n := \{1, ..., n\}$ und $F$ eine nichtleere Teilmenge von $I_n \times I_n$. Es gelte:

$$(i, j) \in F \Rightarrow (i, i), (j, i), (j, j) \in F.$$

Sei $M_F = \{A = (a_{ij}) \in R^{n\times n} : \ a_{ij} = 0 \text{ für } (i, j) \notin F\}$. Zeigen Sie die analogen Eigenschaften.

**(12)** (a) Multiplizieren Sie der Reihe nach die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ von links mit (ganzzahligen!) Elementarmatrizen $P_1, ..., P_r$ aus $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ derart, dass sich am Ende $P_r \cdots P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ (mit geeigneten ganzen Zahlen $a, b, c$) ergibt. Dabei hängt $r$ von Ihrer Strategie ab.

(b) Sei $P = P_r \cdots P_1$ (mit $P_1, \ldots, P_r$ aus (a)). Bestimmen Sie $P^{-1}$ mit Hilfe der Regeln 3.6. Benutzen Sie dabei die Regel $P^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_r^{-1}$.

Machen Sie bei (a) und (b) jeweils eine Probe!

.....

[a] Erstaunlich: es geht mit weniger Multiplikationen z.B. für $l = m = n \geq 16$ mit dem Algorithmus von Strassen. Mehr Interessantes dazu in dem Standardwerk „Modern Computer Algebra“ von Joachim von zur Gathen und Jürgen Gerhard bei Cambridge University Press, 2. Auflage.