Modul Lineare Algebra **14. November 2005**
WiSe 2005/2006
Schmale

Aufgabenblatt 5

(13) Seien R ein Ring. Zerlegen Sie die Matrix

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{5\times 5}$$

in ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ IV (P_i^j).
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis!

(14) Bestimmen Sie ein $N \in \mathbb{N}_+$ und eine Folge $U_1, \ldots, U_N$ von Elementarmatrizen aus $R^{n\times n}$ derart, dass $U_N \cdot \cdots \cdot U_1 \cdot A$ in reduzierter (nur bei (a) und (c)) Zeilenstufenform ist, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis und zwar für

(a) $R = \mathbb{Q}, n = 3$ und

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 9 & 3 & 2 & 12 \end{bmatrix},$$

(b) $R = \mathbb{Z}, n = 3$ und A wie in (a),

(c) $R = \mathbb{C}, n = 2$ und

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Bearbeiten Sie **zwei** der drei Teilaufgaben.

(15) Sei R ein kommutativer Ring. Seien $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$ aus $R^{m\times 1}$ und $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ aus $R^{n\times 1}$. Es gelte für $k \geq 0$

$$v^{(k+1)} = Av^{(k)} + Bu^{(k)}. \qquad (*)$$

Interpretiert man dabei die $v^{(i)}$ als Zustandsvektoren oder kurz Zustände und die $u^{(i)}$ als Eingabevektoren oder Inputs, so beschreibt $(*)$ einen sogenannten diskreten (linearen) Entscheidungsprozess[a]. Eine Frage, die sich dann stellt, ist, ob es ausgehend vom bekannten Anfangszustand $v^{(0)}$ möglich ist, die Inputs so zu wählen, dass nach n Schritten ein gewünschter Zustand $v^{(n)}$ eintritt. Sei nun $R = \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Können $u^{(0)}, u^{(1)}$ so gewählt werden, dass sich $v^{(2)} = \begin{bmatrix} -10 \\ 46 \\ -30 \end{bmatrix}$ ergibt?

Zusatz: Was passiert, wenn Sie noch einen weiteren Schritt zulassen (mathematisch oder im Kontext des Entscheidungsprozesses)?

.....

[a] oder lineares diskretes System, oder Abtastprozess o. Ä.