Aufgabenblatt 6

(16) Gegeben seien

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}, \qquad B_\lambda := \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A invertierbar ist und berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist B_λ invertierbar? Berechnen Sie für diese Werte auch die Inverse B_λ^{-1}.

(17) Fortsetzung der Aufgabe (14). Bearbeiten Sie die von Ihnen gewählten Aufgabenteile wie folgt weiter: Bei (a):

(i) Bestimmen Sie $L_1 := \{b \in \mathbb{Q}^{3\times 1} : \quad \mathsf{Lös}\,(A, b) \neq \varnothing\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Menge $\mathsf{Lös}\,(A, b)$ für $b \in L_1$.

Bei (b): Geben Sie ein $b \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$ an, derart dass $\mathsf{Lös}\,(A, b) \cap \mathbb{Z}^{4\times 1} \neq \varnothing$, und ein $b' \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$, derart dass $\mathsf{Lös}\,(A, b') \cap \mathbb{Z}^{4\times 1} = \varnothing$.

Bei (c): Bestimmen Sie die Menge $\mathsf{Lös}\,(A, b)$ mit $b := \begin{bmatrix} 10 + 10i \\ 10 - 10i \end{bmatrix}$.

(18) Sei R ein kommutativer Ring und seien $u, v, v', w \in R^{1\times 3}$. Leiten Sie nur aus der Leibniz-Formel für die Determinante die folgenden Eigenschaften ab:

(a) $\mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = 0$ (b) $\mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix} = -\mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$

(c) $\mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ v + v' \\ w \end{bmatrix} = \mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ v' \\ w \end{bmatrix}$ (d) $\mathsf{det} \begin{bmatrix} u \\ v \\ v \end{bmatrix} = 0$.

Vorschlag für die Bezeichnungen: $u = [u_1, u_2, u_3], v = [v_1, v_2, v_3], w = [w_1, w_2, w_3]$ und $v' = [v'_1, v'_2, v'_3]$.

Zusatzaufgabe für 7 zusätzliche Punkte.

(a) (3 Punkte)Lösen Sie nach dem in §4 beschriebenen und begründeten Verfahren die beiden linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = b'$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}, \; b = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \; b' = \begin{bmatrix} -17 \\ 6 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}.$$

(b) (4 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 5 & 5 & 5 & \beta \\ -1 & 2 & \epsilon & -4 & \gamma \\ -3 & 0 & -5 & -10 & \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller rationalen 5-Tupel (α, β, γ, δ, ϵ), für die das LGS $Ax = b$ universell (d. h. für alle $b \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$) lösbar ist.

Beachten Sie bitte: Ihre Bearbeitungen müssen sich, um bewertet werden zu können, auf Definitionen, Resultate und Verfahren der Vorlesung beziehen. Zitieren Sie genau und dokumentieren Sie Ihre Rechenschritte. Es geht darum, ein Verfahren in einem vorgegebenen mathematischen Begründungszusammenhang zu verstehen und entsprechend anzuwenden und nicht darum, irgendwie zu einem Ergebnis zu kommen.