# Aufgabenblatt 7

**(19)** Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und gelte $a_{31} = a_{41} = a_{32} = a_{42} = 0$ und $a_{ij} \neq 0$ sonst.

(a) Geben Sie alle Permutationen aus $S_4$ an, für die gilt: $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)} \neq 0$.

(b) Bestimmen Sie die Vorzeichen dieser Permutationen und geben Sie $\det A$ nach der Leibniz-Formel an.

(c) Zeigen Sie darauf aufbauend: $\det A = \left(\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\det \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right)$.

**(20)** Berechnen Sie die Determinanten von **drei** der folgenden Matrizen und dokumentieren Sie jeweils so vollständig und verständlich, aber auch so kurz wie möglich, wie Sie verfahren sind:

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}, \quad V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4},$$

$$M := \begin{bmatrix} i & -2+3i & 2i \\ 4+i & -3+7i & 0 \\ 2-i & 1-i & -4i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Zur Erinnerung: Der Körper $\mathbb{Z}_2$ wurde in 0.12 eingeführt.

**(21)** (a) Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei $A_n$ eine reelle $n \times n$-Matrix, mit folgenden Eigenschaften ($A_n = (a_{ij})$):

$$a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \geq 2, \qquad a_{ii} = \alpha_i \text{ für } 1 \leq i \leq n$$
$$\text{und} \qquad a_{i,i+1} = \beta_i, a_{i+1,i} = \gamma_{i+1} \text{ für } 1 \leq i \leq n-1 .$$

Man zeige: $\det A_1 = \alpha_1$, $\det A_2 = \alpha_1\alpha_2 - \gamma_2\beta_1$ und für $n \geq 3$:

$$\det A_n = \alpha_n \det A_{n-1} - \gamma_n\beta_{n-1} \det A_{n-2} .$$

(b) Es sei $A_n$ wie in Teil (a) mit $\alpha_i = 6$, $\gamma_i = \beta_i = \sqrt{5}$. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$\det A_n = \frac{1}{4}\left(5^{n+1} - 1\right).$$

(c) Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-1) & 1 \end{bmatrix} = n!.$$

Bearbeiten Sie **(a) und (b)**, oder **(a) und (c).** Tipp: Entwicklungssätze!

**Die Beweise und Berechnungen bei Aufgabe (19) und (20) sollen im Kontext von §5 der Vorlesung geführt werden, und zwar soll außer der Definition der Determinante (bei (19)) nur noch 5.13 (bei (20) benutzt werden.**

**Zusatz:** Fortsetzung von Aufgabe (15). Beweisen Sie im Fall, wo $R$ ein Körper ist, der mit $K$ bezeichnet sei, das folgende Kalman[2]-Kriterium für Erreichbarkeit:

$$\{v \in K^{n\times 1} : v \text{ ist in } n \text{ Schritten von 0 aus erreichbar}\} = K^{n\times 1} \Leftrightarrow \operatorname{Rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

.....

[1] *http://www.ieee.org/organizations/history_center/legacies/kalman.html*