Aufgabenblatt 8

(22) Welche der Teilmengen sind Untermoduln/Untervektorräume der angegebenen Moduln/Vektorräume? Stellen Sie jeweils eine Behauptung auf und beweisen Sie diese.

(a) $U_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \; xy + yz + zx = 0 \right\}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^{3\times 1}$

(b) $\mathbb{Z}[i] := \left\{ a + bi \in \mathbb{C} : \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{C}$.
Bemerkung: $\mathbb{Z}[i]$ ist außerdem ein kommutativer Ring (Unterring von $\mathbb{C}$) und heißt Ring der Gauß'schen ganzen Zahlen.

(c) $U_2 := \left\{ M \in K^{2\times 3} : \; \mathsf{Rang}\, M \leq 1 \right\}$ im K-Vektorraum $K^{2\times 3}$, K ein Körper.

(d) $U_3 := \left\{ \left(a_k\right)_{k\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \; a_k \neq 0 \quad \text{nur für endlich viele } k \right\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(e) $U_4 := \left\{ \left(a_k\right)_{k\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \; a_k \leq a_{k+1} \quad \text{für} \quad k \geq 0 \right\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(23) Gilt $\quad < \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} >_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^{3\times 1}$?

(24) (a) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$\mathsf{det}\, A = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(A_{1,\bullet}, \ldots, A_{n,\bullet}\right) \text{ linear abhängig}$$

(b) Geben Sie in $\mathbb{R}^3$ eine Folge von Vektoren $\left(v^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ an, von denen keine drei linear abhängig sind. Anleitung: Es kommt nicht darauf an, reelle Zahlen zur Verfügung zu haben. Auch in $\mathbb{Z}^3$ gibt es viele Lösungen. Eine davon kann man mit Hilfe der Vandermonde-Matrix/Determinante finden.

Zusatzaufgabe: Vergleichen Sie die Anzahl der Multiplikationen μ_L und μ_Z, die erforderlich sind, um die Determinante einer "allgemeinen" Matrix $A \in R^{n\times n}$ mit Hilfe der Leibnizformel bzw. mit Zeilenumformungen und einer von Ihnen gewählten Strategie zu berechnen.