Aufgabenblatt 9

- (25) Beweisen Sie die Regeln in 6.22. Benutzen Sie dabei lediglich die Definition 6.11!
- (26) Sei V ein \mathbb{Q} -Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ aus V.
 - (a) Es gelte $w_1 = v_1 + 2v_2 + 3v_3$, $w_2 = 3v_1 + v_2 + 2v_3$, $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$.

Gilt
$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{O}} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_{\mathbb{O}}$$
?

- (b) Sei nun zusätzlich (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$.
- (27) Im \mathbb{R}^4 seien folgende Vektoren vorgegeben⁽¹⁾:

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Bestimmen Sie eine Basis von $\langle a, e \rangle_{\mathbb{R}} + (\langle a, c, e \rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle a, b, c \rangle_{\mathbb{R}})$. (c) Ergänzen Sie die Vektoren g = a + b, h = b + c zu einer Basis von $\langle a, b, c, d \rangle_{\mathbb{R}}$.

Sie können bei dieser Aufgabe sowohl die Verfahren aus § 6 benutzen, als auch durch Überlegungen einen Teil der Rechnungen vermeiden. Überlegungen und/oder Rechnungen müssen wie immer nachvollziehbar, mit Zitaten aus der Vorlesung und mit korrektem Text dargestellt werden.

Zusatzaufgaben⁽²⁾. Bei einer der Aufgaben (B), (C), (D), oder (E) können Sie 6 Extrapunkte erwerben. Bei Aufgabe (F) können Sie Ihre mathematische Lesekompetenz trainieren. (H),(I),(J) beziehen sich auf Matrizenrechnung. Bei Aufgabe (L) können Sie nochmal die Kraft der vollständigen Induktion erfahren.

- (A) Sei (vgl. Beispiel 6.7 (f)) die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch die Vorschrift $f(x,y) = \sin^2(y-x) + \sin^2(x+2y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und sei N die Nullstellenmenge von f. Bestimmen Sie eine Basis von N als \mathbb{Z} -Modul.
- (B) Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.
 - (a) Sei (v_1, \ldots, v_m) eine linear unabhängige Familie aus V. Zeigen Sie nur mit Hilfe der Definition eines Aufspanns und der Definition der linearen Unabhängigkeit:

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_K \cap \langle v_1, v_2, v_4 \rangle_K = \langle v_1, v_2 \rangle_K$$

(b) Seien U und W Untervektorräume von V und gelte:

.....

$$U\subseteq W \qquad \text{ und } \qquad \mathsf{dim}_K U = \mathsf{dim}_K W$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Ergebnissen aus der Vorlesung, dass dann U und W gleich sind.

- (c) Sei $\dim_{K} V = n \geq 3$. Sei U ein von V verschiedener Untervektorraum von V, der jeden zweidimensionalen Untervektorraum von V in mehr als einem Punkt schneidet. Welche Werte kann die Dimension von U annehmen? Geben Sie eine ausführliche Begründung mit Ergebnissen aus der Vorlesung und bei Bedarf auch mit Teil (b).
- (C) Im \mathbb{Q} -Vektorraum $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ sei $U=\left\langle v_1,\ldots,v_5\right\rangle_{\mathbb{Q}}$ mit $v_1={}^{\mathsf{t}}[1,2,-2,2,-1],$ $v_2 = {}^{\mathsf{t}}[1, -2, -1, 3, -2], v_3 = {}^{\mathsf{t}}[2, 4, -7, 1, 1], v_4 = {}^{\mathsf{t}}[1, 2, -5, -1, 2], v_5 = {}^{\mathsf{t}}[-1, 2, 3, -1, 0].$
 - (a) Bestimmen Sie nach dem Verfahren in 6.25 die Dimension $\dim_{\mathbb{Q}} U$, eine Basis von U, und eine Ergänzung dieser Basis zu einer Basis von $\mathbb{Q}^{n\times 1}$.
 - (b) Bestimmen Sie eine Basis von U, die den Vektor [1, 2, 3, 7, -6] enthält.

wenden!

Bitte

¹ (a) und (b) entstammen dem Buch: "On the teaching of linear algebra", Hrsg. Jean-Luc Dorier, Kluwer, 2000. In diesem Buch werden PISA-ähnliche Untersuchungen zu den Kenntnissen von Studienanfängern in Linearer Algebra in Frankreich dargestellt.

² Es handelt sich hauptsächlich um Aufgaben aus früheren Vorlesungen zur Linearen Algebra in Oldenburg.

- (**D**) Seien $v_1 = [0, 1, 0, 1, 1, 0], v_2 = [1, 0, 1, 0, 1, 0], v_3 = [1, 0, 1, 1, 1, 1],$ $v_4 = [1, 1, 0, 1, 1, 1], w_1 = [1, 1, 1, 1, 0, 0], w_2 = [1, 1, 1, 0, 0, 1], w_3 = [1, 0, 0, 0, 0, 1],$ $w_4 = [0, 1, 0, 0, 1, 1]$ Vektoren aus $\mathbb{Z}_2^{1 \times 6}$. Erzeugen die Familien $(v_i)_{1 \leq i \leq 4}$ und $(w_i)_{1 \leq i \leq 4}$ denselben Untervektorraum in $\mathbb{Z}_2^{1 \times 6}$? (Solche Räume treten bei der Codierung von Nachrichten auf.)
- (E) Seien $u_1 = {}^{t}[1, 2, 1, 1], u_2 = {}^{t}[1, 1, 1, 2], w_1 = {}^{t}[2, 1, -1, 1] \text{ und } w_2 = {}^{t}[-3, -2, 3, 1] \text{ Vektoren aus } \mathbb{Q}^{4 \times 1}$.
 - (a) Zeigen Sie, dass $U=\left\langle u_1,u_2\right\rangle_{\mathbb{O}}$ und $W=\left\langle w_1,w_2\right\rangle_{\mathbb{O}}$ Ebenen sind.
 - (b) Klären Sie mit Hilfe der Dimensionsformel 6.29, welche Dimensionen für den Durchschnitt zweier Ebenen in Frage kommen könnten.
 - (c) Bestimmen Sie den Durchschnitt der beiden Ebenen.
 - (d) Ergänzen Sie eine Basis des Durchschnitts jeweils zu einer Basis von U bzw. W.
- (F) Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $m \le 1$ und seien $v_1, \ldots, v_{m+1} \in V$. Zeigen Sie: Genau dann sind keine m der Vektoren $v_1,\dots,v_{m+1}\in V$ linear abhängig, wenn eine Zeigen Sie: Genau uahn sind kome m and $\sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \in K$ nur 0 ergeben kann, falls $\prod_{i=1}^{m+1} \lambda_i \neq 0$.
- (G) Seien U und W Untervektorräume eines Vektorraumes über dem Körper K. Zeigen Sie:

$$U \cup W$$
 ist ein Untervektorraum von $V \iff U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$

- (H) Seien K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie:
 - (a) Ist Rang A = m, dann gibt es eine Matrix $A' \in K^{n \times m}$ so dass $AA' = E_m$ ist.
 - (b) Ist Rang A = n, so gibt es eine Matrix $A'' \in K^{n \times m}$ so dass $A''A = E_n$ ist.
- Seien K ein Körper und $T \in GL(n; K)$ sowie n = r + s. Beweisen Sie:
 - (a) Ist T von der Gestalt $T = \begin{bmatrix} E_r & X \\ 0_{s \times r} & Y \end{bmatrix}$ mit $X \in K^{r \times s}, Y \in K^{s \times s}$, dann ist $Y \in GL(s; K)$.
 - (b) Ist T von der Gestalt $T=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ mit $A\in K^{r\times n}$ und $B\in K^{s\times n}$, dann gilt: $\mathsf{Rang}\,A=r$ und
- Sei Δ_n die Vandermonde-Determinante in der Schreibweise bei [F], Seite 196. Mit den dortigen Bezeichnungen sei $M=(m_{ij})$ die Matrix mit den Einträgen $m_{ij}=x_i^{j-1}$ für $1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n-1$ und $m_{i,n}=\prod_{1\leq k\leq n}x_k$ für $1\leq i\leq n.$ Zeigen Sie: $\det M=(-1)^{n-1}\Delta_n.$

Bei den Umformungen, die Sie vornehmen, dürfen Sie die Unbestimmten x_i als invertierbar be-

- (K) Wieviele Punkte liegen auf einer Graden durch 0 in \mathbb{Z}_2^n und wieviele Graden durch 0 gibt es?

 (L) Seien $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und U_1, \dots, U_k Untervektorräume eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V. Wir definieren: $\sum_{r=1}^k U_r = \Big\{ \sum_{r=1}^k u_r : u_r \in U_r \text{ für } 1 \leq r \leq k \Big\}$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach k:

$$\dim_K \Big(\sum_{r=1}^k U_r\Big) + \sum_{s=2}^k \dim_K \Big(\big(\sum_{t=1}^{s-1} U_t\big) \cap U_s\Big) = \sum_{r=1}^k \dim_K U_r$$

Für k=2 ergibt dies die Dimensionsformel 6.29. Die Assoziativität der Addition von Untervektorräumen darf vorausgesetzt werden.

Außerdem: Eine klösterliche Mathe-Aufgabe "zur Schärfung des Geistes der Jünglinge" vor ca 1200 Jahren steht auf der Internetseite des Moduls.

Vielleicht ist was dabei, was Sie in der bevorstehenden dreiwöchigen Pause reizt?