Name	Vorname	Habe das Merkblatt gelesen. Unterschrift:

Tutor(in)	Matrikelnummer	Geburtsdatum	**Studiengang**

1 (6 P)	2 (4 P)	3 (9 P)	4 (9 P)	5 (12 P)	6 (6 P)	7 (8 P)	8 (6 P)	$\sum$	Punkte Übungen	Punkte gesamt	Note

Modul Lineare Algebra — Wiederholungsklausur 7. April 2006

WiSe 2005/2006 Schmale

Die Studierenden der Informatikstudiengänge bearbeiten nur die Aufgaben 1-5 in der Zeit von 9 bis 11 Uhr. Alle weiteren Teilnehmer(innen) bearbeiten die Aufgaben 1-8 in der Zeit von 9 bis 12 Uhr.
Zum Erreichen der vollen Punktzahl bei einer Aufgabe ist es erforderlich, Ihre Lösung korrekt aufzuschreiben und insbesondere Begründungen Ihrer Ergebnisse anzugeben.

(1) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(a) (2 Punkte) Stellen Sie eine Behauptung auf für die Matrix $A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n-mal}, n \in \mathbb{N}_+$, in der Form

$$A^n = B(n) = \begin{bmatrix} b_{11}(n) & b_{12}(n) & b_{13}(n) & b_{14}(n) \\ b_{21}(n) & b_{22}(n) & b_{23}(n) & b_{24}(n) \\ b_{31}(n) & b_{32}(n) & b_{33}(n) & b_{34}(n) \\ b_{41}(n) & b_{42}(n) & b_{43}(n) & b_{44}(n) \end{bmatrix}$$

mit geeigneten möglichst einfachen Ausdrücken $b_{ij}(n)$ (z.B. $b_{24}(n) = 0$ für $n \geq 1$).

(b) (4 Punkte) Beweisen Sie Ihre Behauptung durch vollständige Induktion.

(2) (4 Punkte) Seien V ein Vektorraum über dem Körper K, $L: V \to V$ eine K-lineare Abbildung und U ein Untervektorraum von V.
Zeigen Sie: $L(U) = \{L(u) | u \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V.
Geben Sie beim Beweis insbesondere auch an, welche Eigenschaften von U Sie benutzen (z.B.: $0 \in U$, weil U ein Untervektorraum ist. Da $L(0) = 0$, ist demnach $0 \in L(U)$.)

(3) Für eine Matrix $A \in \mathbb{Z}_2^{4\times 3}$ sei $L_A: \mathbb{Z}_2^{3\times 1} \to \mathbb{Z}_2^{4\times 1}$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass gilt: $\dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathsf{Kern}\, L_A) = 2$. (Nachweis !)

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $\dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathsf{Bild}\, L_A) = 1$ und zugleich A keine Nullspalte enthält. (Nachweis nicht vergessen !)

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $L_A\left({}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(4) Sei $L: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ eine lineare Abbildung. Mit $\mathcal{K}$ sei die kanonische Basis in $R^{3\times 1}$ bezeichnet.
Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$ von $R^{3\times 1}$ gelte $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(L) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von ${}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ bezüglich $\mathcal{A}$.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe von A und $\mathcal{A}$ den Vektor $L({}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix})$. (Vorsicht: erst überlegen ! Welcher Vektor ist auf welche Basis bezogen ? (a) ist nützlich.)

(c) (4 Punkte) Bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ gelte $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.
Bestimmen Sie $C = M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(L)$ mit Hilfe von B und $\mathcal{B}$.

Bitte wenden !

(5) (12 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **richtig** (Antwort: **ja**) oder **falsch** (Antwort: **nein**) sind. Jede richtige Antwort ergibt 2 Punkte, jede falsche -2 Punkte. Es gibt stets mindestens 0 Punkte.

(a) Gibt es einen $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Q}^{2\times 1}$, der nicht zugleich $\mathbb{Q}$-Untervektorraum ist ?

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $n \geq 2$, dann ist $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\left(\mathsf{Lös}\,(A,0)\right) = n-1$.

(c) Sei V ein von $\{0\}$ verschiedener Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Wenn je zwei verschiedene Vektoren $\neq 0$ aus V bereits V erzeugen, dann ist $\mathsf{dim}_K V = 1$.

(d) Im Körper der komplexen Zahlen gilt: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2 = -\,i$.

(e) Sei $n \geq 2$. Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\mathsf{det}\,(-A) = -\mathsf{det}\,(A)$.

(f) Über $\mathbb{Q}$ gilt $\mathsf{det}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1$.

Ende der Klausuraufgaben für Studierende der Informatik

---

(6) Sei $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ und sei $L_A : \mathbb{Q}^{5\times 1} \to \mathbb{Q}^{5\times 1}$ die zugehörige lineare Abbildung. L_A habe die folgenden Eigenvektoren: $v^{(1)}$ zum Eigenwert 1; $v^{(2)}, v^{(3)}$ beide zum Eigenwert 2 und $v^{(4)}$ zum Eigenwert 0. $v^{(2)}, v^{(3)}$ seien linear unabhängig. Sei φ_A das charakteristische Polynom von A.

(a) (3 Punkte) Begründen Sie ausführlich, warum dann $\varphi_A = x(x-2)^2(x-1)(x-\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{Q}$(!).

(b) (3 Punkte) Geben Sie eine zusätzliche Bedingung für λ an, die bewirkt, dass L_A diagonalisierbar wird. (Begründung!)

(7) Seien $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie: $c \in \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}}$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie: $d \notin \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}}$

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis von $\langle a, b\rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle c, d\rangle_{\mathbb{R}} =: U$.
(Bei Benutzung von (a),(b) geht dies mit kurzer Überlegung/Begründung auch ohne Rechnung.)

(d) (2 Punkte) Stellen Sie U dar als Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems.

(8) Seien $u = {}^{\mathsf{t}}\left[1, 1, -1, -1, -1\right]$, $v^{(1)} = {}^{\mathsf{t}}\left[3, 2, 1, 2, 2\right]$, $v^{(2)} = {}^{\mathsf{t}}\left[3, 4, 5, 0, 0\right] \in \mathbb{R}^{5\times 1}$. Sei $W = \langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle_{\mathbb{R}}$.

(a) (3 Punkte) Orthogonalisieren Sie die Familie $(v^{(1)}, v^{(2)})$.

(b) (3 Punkte) Gibt es einen Vektor $w \in W$ mit $w \neq 0$ und $w \perp u$?
Wenn ja: berechnen Sie einen. Wenn nein, begründen Sie dies.

Viel Erfolg !