**3. 10 Transposition der Elementarmatrizen aus $R^{n\times n}$.**

Für $1 \le i, j \le n$ und $\lambda \in G(R)$ bzw. $\lambda \in R$ gilt

$$ {}^{\mathrm{t}}S_i(\lambda) = S_i(\lambda)\ , \quad {}^{\mathrm{t}}Q_i^j(\lambda) = Q_{\underset{\uparrow}{j}}^i(\lambda)\ , \quad {}^{\mathrm{t}}P_i^j = P_i^j\ . $$

**3. 11 Definition.**

Eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ heißt **symmetrisch**, wenn ${}^{\mathrm{t}}A = A$ und **antisymmetrisch**, wenn ${}^{\mathrm{t}}A = -A$.

**<u>Mit elementaren Umformungen und Elementarmatrizen zur Zeilenstufenform.</u>**
(manchmal auch Treppenform genannt; Englisch: row echelon form)

**3. 12 Definition.**

Die Spalten $\boldsymbol{e_i} = (E_n)_{\bullet,i}$ der $(n\times n)$-Einheitsmatrix werden meist **kanonische Basisvektoren oder Standardbasisvektoren** genannt, ebenso die Zeilen. Bei der Schreibweise $e_i$ muss man also immer schon wissen, ob es sich um eine Zeile oder um eine Spalte handeln soll.

**3. 13 Satz. „Ausräumen“ einer Spalte.**

Sei $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ und seien $i \in I_m = \{1, \dots, m\}$ und $j \in I_n = \{1, \dots, n\}$. **Sei $\boldsymbol{a_{ij}}$ invertierbar**.
Durch höchstens $m-1$ elementare Zeilenumformungen vom Typ III und einer weiteren vom Typ I bzw. durch die entsprechenden Multiplikationen von links mit entsprechenden Elementarmatrizen kann die Matrix $A$ so umgeformt werden, dass in der $j$-ten Spalte alle Einträge außer dem $i$-ten 0 sind und der $i$-te Eintrag 1 ist, m.a.W. so, dass $e_i$ die $j$-te Spalte von $A$ wird.

**3. 14 Definition. Zeilenstufenform und reduzierte Zeilenstufenform.**

Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$, $B \in R^{m\times n}$ und sei $B = (b_{ij}) \neq 0_{m\times n}$. Seien weiter $\nu_i$ die Anzahl der führenden Nullen in $B_{i\bullet}$ für $i \in I_m$, $r$ die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in $B$ und $j_i := \nu_i + 1$, falls $\nu_i < n$ und für $i \in I_m$.
<u>Beispiel:</u> Bei der Matrix

$$ B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{3\times 4} $$

sei $a \neq 0$ und $u \neq 0$. Dann ist $\nu_1 = 0, \nu_2 = 1, \nu_3 = 4$, $r = 2, j_1 = 1, j_2 = 2$.
Wir sagen **'$\boldsymbol{B}$ ist in Zeilenstufenform' (ZSF)**, wenn gilt:

$$ 0 \le \nu_1 < \ \cdots\ < \nu_r < n \quad (0 \le \nu_1 < n,\ \text{falls } r = 1.) $$

$$ \text{und} \qquad b_{ij_i} \neq 0 \text{ für } 1 \le i \le r\,. $$

Wir sagen '$B$ ist in **'reduzierter Zeilenstufenform' (red. ZSF)**, wenn <u>außerdem</u> gilt:

$$ B_{\bullet j_i} = e_i \ \text{ für } i \in I_r $$

Die ZSF lässt sich wie folgt veranschaulichen:

$$ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underline{|\ b_{1j_1}} & *\,*\,* & * & * & *\,*\,* & * & *\,*\,* & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{|\ b_{2j_2}} & *\,*\,* & * & *\,*\,* & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \underline{|\ b_{rj_r}} & *\,*\,* & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} $$

Dabei müssen die Eckeinträge $b_{1j_1}, \dots b_{rj_r}$ alle ungleich Null sein.

Die red. ZSF lässt sich wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underline{|1} & *** & * & 0 & *** & 0 & *** & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{|1} & *** & 0 & *** & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \underline{|1} & *** & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

**3. 15 Beispiele:**

**(a)** Bei der Matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ ist $\nu_1 = 0 < \nu_2 = 2 < \nu_3 = 4 = n$, $r = 2,\ j_1 = \nu_1 + 1 = 1,\ j_2 = \nu_2 + 1 = 3,\ b_{1j_1} = b_{11} = 2,\ b_{2j_2} = b_{23} = 1.$

$B$ ist in ZSF aber nicht in reduzierter ZSF weil $b_{1j_1} \neq 1$ oder weil $b_{1j_2} \neq 0$. $b_{12} \neq 0$.

**(b)** $E_m \in R^{m\times m}$ ist in reduzierter ZSF.

**3. 16 Satz über die Umformung in reduzierte Zeilenstufenform.**

Sei ***K* ein Körper** und $A \in K^{m\times n}, A \neq 0_{m\times n}$.

**(a)** Durch endlich viele elementare Zeilenumformungen oder (äquivalent) durch endliche viele Multiplikationen von links mit Elementarmatrizen kann $A$ in reduzierte ZSF überführt werden/ gebracht werden.

**(b)** Wenn $A$ quadratisch ($m = n$) <u>und</u> invertierbar ist (d.h. $A \in G(K^{n\times n})$), dann ist $E_n$ die reduzierte Zeilenstufenform von $A$.

**3. 17 Beispiel.**

Vorgelegt sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$. Wir führen die folgenden elementaren Zeilenumformungen durch:

$$A \overset{S_1(1/2)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_2^1(-6)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_3^1(-4)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{S_3(-1/6)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_3^2(2)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Q_1^2(-1)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: B$$

Bei der letzten mit $B$ bezeichneten Matrix liegen folgende Parameterwerte vor: $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 4$, $r = 2$, $j_1 = 1$ und $j_2 = 3$. Die erste Spalte von $B$ ist $e_1$ und die dritte Spalte von $B$ ist $e_2$.

Im vorangehenden Beispiel wurden die elementaren Umformungen mit Hilfe derjenigen Elementarmatrizen angegeben, die von links an $A$ heran multipliziert jeweils die vorgenommene elementare Umformung bewirken. Sie können stattdessen aber auch die in der Vorlesung benutzten Abkürzungen für die Umformungen verwenden.

**<u>Wir wenden nun unsere Kenntnisse zuerst bei invertierbaren Matrizen an.</u>**

Zur Erinnerung: $R^{n\times n}$ ist ein Ring und $A \in R^{n\times n}$ heißt im Ring $R^{n\times n}$ invertierbar, wenn es eine Matrix $\widetilde{A} \in R^{n\times n}$ gibt derart, dass gilt $A \cdot \widetilde{A} = E_n = \widetilde{A} \cdot A$. Wenn $A$ invertierbar ist,

dann ist eine solche Matrix $\widetilde{A}$ eindeutig bestimmt und wird mit $A^{-1}$ bezeichnet. Die Menge der invertierbaren Elemente in $R^{n\times n}$ bilden die multiplikative i.A. nicht kommutative Gruppe $G(R^{n\times n})$.

**3. 18 Neue Bezeichnung.**

Seien $R$ ein Ring und $n \in \mathbb{N}_+$. Für $G(R^{n\times n})$ wird in der linearen Algebra üblicherweise folgende Bezeichnung eingeführt:

$$\boldsymbol{GL(n;R)} := G(R^{n\times n}) = \{A \in R^{n\times n} : \quad \text{A ist invertierbar } \}$$

$GL(n;R)$ heißt **allgemeine lineare Gruppe**. Die Bezeichnung $GL(n;R)$ kommt vom englischen Namen: general linear group.

**3. 19 Die wichtigsten Regeln für invertierbare Matrizen (zum Teil Wiederholung!).**

**(1)** Mit $A$ aus $GL(n;R)$ ist auch $A^{-1} \in GL(n;R)$.

**(2)** Sei $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Mit $A_1, \ldots, A_r$ aus $GL(n;R)$ ist auch das Produkt $A_1 \cdots A_r$ aus $GL(n,R)$ und es ist
$$(A_1 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$
Beachte die Umkehrung der Reihenfolge.

**(3)** Alle Elementarmatrizen von $R^{n\times n}$ sind in $GL(n;R)$.

**(4)** Eine Matrix aus $GL(n,R)$ hat keine Nullzeile und keine Nullspalte.

**(5)** Mit $A$ ist auch die transponierte Matrix ${}^{\mathsf{t}}A$ in $GL(n;R)$ und es gilt: $({}^{\mathsf{t}}A)^{-1} = {}^{\mathsf{t}}(A^{-1})$.

**(6)** Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ alle invertierbar, dann ist $\mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ aus $GL(n;R)$ und es gilt: $\big(\mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big)^{-1} = \mathsf{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$

**(7)** Sei $\lambda \in R$ invertierbar und sei $A \in GL(n;R)$. Dann ist $\lambda A \in GL(n;R)$ und es gilt : $(\lambda A)^{-1} = A^{-1} \cdot \mathsf{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)^{-1} = \mathsf{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)^{-1} \cdot A^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

Unser Ergebnis über die reduzierte Zeilenstufenform in Satz 16 führt direkt zu folgender Strukturbeschreibung der Gruppe $GL(n;K)$:

**3. 20 Produktdarstellung für invertierbare Matrizen.**

**Die allgemeine lineare Gruppe über einem Körper $K$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt.** Damit ist hier gemeint, dass jede Matrix aus $GL(n;K)$ sich als Produkt von Elementarmatrizen darstellen lässt.

Eine wichtige Klasse spezieller invertierbarer Matrizen bilden die sogenannten Permutationsmatrizen.

**3. 21 Definition.**

Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $R$ ein Ring und $P \in R^{n\times n}$. Wenn $P$ in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag hat und dieser außerdem jeweils 1 ist, dann nennen wir $P$ eine **Permutationsmatrix**.

Elementarmatrizen vom Typ IV sind spezielle Permutationsmatrizen. Man könnte sie auch Vertauschungsmatrizen nennen. Mit ihnen lassen sich alle Permutationsmatrizen darstellen.

**3. 22 Satz über die Produktdarstellung von Permutationsmatrizen.**

Bezeichnungen wie in Definition 3.22. Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:
Jede Permutationsmatrix $P \in R^{n\times n}$ lässt sich darstellen als Produkt von höchstens $n$ Elementarmatrizen vom Typ IV. [1]
**Beweis** durch vollständige Induktion nach (der Zeilen- bzw. Spaltenanzahl) $n$.
Induktionsanfang: Wenn $n = 1$, dann ist $P = [1]$ die einzige Permutationsmatrix. Es ist $P = P$ und die Behauptung trifft demnach zu.

[1] für $n = 1$ bedeutet *'Produkt aus einer Matrix'* diese Matrix selbst.

Induktionsschritt: Die Behauptung des Satzes gelte für eine Zeilenanzahl $n \geq 1$. Wir zeigen nun, dass sie dann auch für Permutationsmatrizen mit $n+1$ Zeilen gilt.
Sei dazu $P \in R^{(n+1)\times(n+1)}$ eine Permutationsmatrix. Sei etwa $P = (p_{ij})$ und sei $k \in I_n$ so gewählt, dass $p_{k,(n+1)} = 1$. Dann ist $p_{i,(n+1)} = 0$ für $i \in I_{n+1} \setminus \{k\}$. Multiplizieren wir nun $P$ von links mit der Elementarmatrix $P_k^{n+1}$ vom Typ IV, dann hat das Produkt die folgende Form:

$$P_k^{n+1} \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{P} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right]$$

mit einer Permutationsmatrix $\widehat{P} \in R^{n\times n}$. Für diese gibt es nach unserer Annahme Permutationsmatrizen $U_1, \ldots, U_r$ vom Typ IV, derart, dass $\widehat{P} = U_1 \cdots U_r$ und $r \leq n$. Entscheidend sind nun die beiden Beobachtungen, dass

$$P_k^{n+1} \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} U_1 \cdots U_r & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U_1 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right] \cdots \left[\begin{array}{c|c} U_r & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1}$$

und dass die sogenannten Blockmatrizen (s.u.) auf der rechten Seite Permutationsmatrizen vom Typ IV sind. Die zweite Gleichung in (1) lässt sich direkt mit Hilfe der Definition des Matrizenproduktes bestätigen. Günstiger ist es aber, die gleichartige Blockstruktur der Matrizen in (1) und die dann gültigen Regeln auszunutzen, die wir gleich danach behandeln. Jedenfalls zeigt (1), dass $P_k^{n+1} \cdot P$ ein Produkt von höchstens $n$ Elementarmatrizen vom Typ IV ist. $P = \left(P_k^{n+1}\right)^2 \cdot P = P_k^{n+1} \cdot \left(P_k^{n+1} \cdot P\right)$ ist dann ein Produkt von höchstens $n+1$ Elementarmatrizen vom Typ IV. Das ist, was wir im Induktionsschritt zeigen wollten.

Mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion schließen wir, dass die Behauptung des Satzes für alle $n \geq 1$ gültig ist. (Dieser oder ein ähnlicher Schlusssatz gehört zu einem vollständigen Induktionsbeweis dazu. Wenn davon ausgegangen werden kann, dass die logische Struktur eines Induktionsbeweises geläufig ist, kann darauf verzichtet werden.)

□

Das Produkt auf der rechten Seite in (1) ist ein Beispiel für das Rechnen mit Blockmatrizen.

**3. 23 $(2 \times 2)$-Blockmatrizen:**

Seien $A_{ij} \in R^{m_i \times n_j}$ für $1 \leq i, j \leq 2$ und $A := \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \in R^{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)}$. Genau genommen ist dann $A$ gar nicht aus $R^{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)}$. Auch hier lassen wir wieder die Klammern bei den Matrizen $A_{ij}$ weg, wenn wir diese zusammen fassen zu $A$. Man nennt $A$ eine **Blockmatrix** mit den **Blöcken** $A_{ij}$. Zu beachten ist, dass bei der Konstruktion einer Blockmatrix die Formate der Blöcke genau zusammen passen müssen. Seien außerdem $B_{ij} \in R^{r_i \times s_j}$ für $1 \leq i, j \leq 2$ und $B := \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$ eine weitere Blockmatrix.

Addition und Multiplikation für Blockmatrizen werden nur unter ganz strengen Formatanforderungen durchgeführt. Die folgenden Regeln bestätigt man durch Vergleich der Einträge.

**(1)** Seien $m_i = r_i$ und $n_i = s_i$ für $1 \leq i, j \leq 2$, dann gilt

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

**(2)** Seien $n_i = r_i$ für $1 \leq i \leq 2$. Dann ist das Produkt $A \cdot B$ erklärt und es gilt

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{array}\right]$$

**(3)** Ein nützlicher Spezialfall von (2) tritt auf, wenn $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, $A_{11} \in GL(n_1; R)$, $A_{22} \in GL(n_2; R)$ und $A_{21} = 0_{m_2 \times m_2}$. Es gilt dann:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in GL(n; R) \text{ und } A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Wenn keine Probleme mit der Lesbarkeit zu befürchten sind, dann lässt man die oben noch eingezeichneten Trennlinien ganz oder teilweise weg.

**3. 24 Beispiel:**
Bei der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ soll zuerst durch elementare Zeilenumformungen erreicht werden, dass der (2,1)-Eintrag und der (3,1)-Eintrag Null werden, und dann mit Hilfe von 23(3), falls möglich, die inverse Matrix berechnet werden:

$$A := \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Zunächst berechnen wir

$$Q_3^1(-3) \cdot Q_2^1(-4) \cdot Q_1^2(-1) \cdot A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 11 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right] := B \tag{2}$$

Setzen wir nun $B_{11} := [1\,], B_{12} := [-2, 1\,], B_{21} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $B_{22} := \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$,
dann erhalten wir nach 23(3)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & -B_{11}^{-1} B_{12} B_{22}^{-1} \\ 0 & B_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -3 & 7 \\ \hline 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -11 \end{array}\right] .$$

Was nützt uns das, wenn wir $A^{-1}$ berechnen wollen ? Dafür ist es notwendig, sich die elementaren Umformungen zu merken. Mit ihrer Hilfe ergibt sich jetzt nämlich ausgehend von (2):

$$A^{-1} = B^{-1} \cdot Q_3^1(-3) \cdot Q_2^1(-4) \cdot Q_1^2(-1) = \left[\begin{array}{c|cc} -8 & 5 & 7 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ 13 & -8 & -11 \end{array}\right]$$

Zur Probe kann man nun $A\,A^{-1}$ oder $A^{-1}A$ berechnen.

**3. 25 Zur Berechnung von Matrizeninversen**
Seien $A \in R^{n\times n}, N \in \mathbb{N}_+$ und $U_N, \ldots, U_1 \in GL(n; R)$. Wir denken bei den $U_i$ z.B. an Elementarmatrizen. Wenn dann gilt

$$U_N \cdots U_1 A = E_n \ ,$$

dann ist auch $A\,U_N \cdots U_1 = E_n$ und $A$ invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = U_N \cdots U_1 \tag{3}$$

Wir haben damit eine Methode zur Berechnung von $A^{-1}$: Berechne die reduzierte ZSF von $A$ und „speichere“ die dabei benutzten Elementarmatrizen. Wenn sich dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix ergibt, dann ist $A$ invertierbar. und $A^{-1}$ ergibt sich nach (3). Die elementaren Umformungen lassen sich auf folgende Weise bequem speichern: Erweitere vor der Berechnung der ZSF die Matrix $A$ mit $E_n$ zu einer Blockzeile

$$\left[\ A \quad | \quad E_n\ \right]$$

Jede elementare Umformung verändert dann entsprechend auch den $E_n$-Block wie folgt

$$U_1 \left[\ A \quad | \quad E_n\ \right] = \left[\ U_1 A \quad | \quad U_1\ \right] \ , \ U_2 \left[\ U_1 A \quad | \quad U_1\ \right] = \left[\ U_2 U_1 A \quad | \quad U_2 U_1\ \right] \ , \ \cdots$$

Falls sich $A$ als invertierbar herausstellt, erhält man am Ende die Blockzeile

$$\left[\ E_n \quad | \quad \underbrace{U_N \cdots U_1}_{= A^{-1}}\ \right] .$$