

## Notizen über Mannigfaltigkeiten

(unter besonderer Berücksichtigung der Intuition)

### Zur Definition einer Mannigfaltigkeit

Zunächst als Erinnerung: Eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$  ist eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^N$ , die nahe einem beliebigen Punkt  $p \in M$  Graph einer glatten Abbildung  $F$  ist, die  $n$  der Koordinaten des  $\mathbb{R}^N$  in die restlichen  $N - n$  überführt. Welche  $n$  Koordinaten dies sind, kann von  $p$  abhängen.

Der Begriff der (abstrakten) Mannigfaltigkeit soll die wesentlichen Eigenschaften von  $M$  unabhängig vom umgebenden Raum  $\mathbb{R}^N$  erfassen (da dieser oft überflüssig, ja sogar irreführend ist).<sup>1</sup>

Die Grundidee ist, dass man sich  $M$  aus Teilstücken 'zusammengeklebt' vorstellt, die offene Mengen (z.B. Bälle) im  $\mathbb{R}^n$  sind.

Die übliche Art, dies zu präzisieren, ist folgende.

**Definition 1** Eine (glatte) Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist ein topologischer Raum  $M$ , zusammen mit einem 'Atlas', d.h. einer Familie von 'Karten'  $(U_i, \kappa_i)_{i \in I}$ , wobei die  $U_i \subset M$  eine offene Überdeckung von  $M$  bilden und jedes  $\kappa_i$  ein Homöomorphismus von  $U_i$  auf eine offene Teilmenge  $V_i$  des  $\mathbb{R}^n$  ist, wobei gilt:

*Die Koordinatenwechsel  $\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}$ , die eine Teilmenge von  $V_j$  auf eine Teilmenge von  $V_i$  abbilden, sind glatt.*

Außerdem soll  $M$  Hausdorff und (in den meisten Büchern) parakompakt sein.<sup>2</sup>

3

Ich finde diese Definition etwas unglücklich, zumindest für eine erste Bekanntschaft mit Mannigfaltigkeiten. Sie ist irgendwie 'von hinten durch die Brust ins Auge': Man beginnt mit einem abstrakten Raum, der dann Stück für Stück 'konkretisiert' wird; abstrus erscheint zunächst, dass der intuitiven Vorstellung von Glattheit dadurch Genüge getan sein soll, dass man bloß die Glattheit der Kartenwechsel fordert.

Daher hier eine alternative Definition, die sich direkt an die Verklebungsvorstellung anlehnt.

---

<sup>1</sup>Was hierbei 'wesentlich' ist, kann durchaus unterschiedlich aufgefasst werden. Heutzutage meint man damit solche Eigenschaften, die mit 'Differenzierbarkeit' (Glattheit) zusammenhängen, aber nicht zum Beispiel metrische Eigenschaften (Längen, Winkel etc.).

<sup>2</sup>Mehr dazu siehe unten.

<sup>3</sup>Genauer gesagt: Da man 'dieselbe' Mannigfaltigkeit sicherlich auf verschiedene solche Weisen mit Karten überdecken kann (Beispiel Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$ !), nennt man zwei Atlanten äquivalent, falls jede Karte des ersten Atlases die Koordinatenwechselbedingung bzgl. jeder Karte des zweiten Atlases erfüllt. Eine Mannigfaltigkeit ist dann  $M$  zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Atlanten.

Zunächst: Was heißt verkleben?

Erstmal für zwei Teilstücke: Seien  $U, V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und  $\phi$  ein Diffeomorphismus von einer offenen Teilmenge von  $U$  auf eine offene Teilmenge von  $V$  (sogenannte Verklebeabbildung). Die *Verklebung von  $U$  und  $V$  mittels  $\phi$*  ist dann die Menge, die man aus der disjunkten Vereinigung von  $U$  und  $V$  erhält, indem man jedes Paar  $p, \phi(p)$  zu einem Punkt verklebt (identifiziert).

Jetzt für beliebig viele Teilstücke: Sind mehrere offene Mengen  $(V_i)_{i \in I}$  gegeben und für alle  $i, j$  eine Verklebeabbildung  $\phi_{ij}$  von  $V_i$  nach  $V_j$ , so erhält man die Verklebung der  $V_i$  entlang aller  $\phi_{ij}$  aus der disjunkten Vereinigung<sup>4</sup> der  $V_i$ , indem man  $p$  mit  $\phi_{ij}(p)$  identifiziert, für alle  $p$  im Definitionsbereich von  $\phi_{ij}$ , und für alle  $i, j$ .<sup>5</sup>

Sei nun  $M$  das Resultat einer solchen Verklebung. Das heißt, jedes  $p \in M$  ist Element eines (oder mehrerer)  $V_i$ . Viele Begriffe, die im  $\mathbb{R}^n$  definiert sind, haben in  $M$  eine recht offensichtliche Bedeutung, z.B. ist eine Menge  $U \subset M$  (per Definition) offen, falls gilt: Sei  $p \in U$ ; wähle ein  $i$  mit  $p \in V_i$ , dann gibt es eine Kugel um  $p$ , die in  $V_i$  und in  $U$  enthalten ist. Damit dies eine sinnvolle Definition ist, sollte man nachprüfen, dass dies von der Wahl von  $i$  unabhängig ist. Dies folgt aber sofort daraus, dass die  $\phi_{ij}$  Homöomorphismen sind.<sup>6</sup>

**Definition 2** *Eine Mannigfaltigkeit ist ein wie oben beschrieben verklebter Raum, der zusätzlich Hausdorff und parakompakt ist.*

7

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Definitionen äquivalent sind. (Übung!)

Hier noch ein paar Bemerkungen zu 'Hausdorff' und 'parakompakt'. Diese Bedingungen sollen gewisse 'pathologische' Fälle ausschließen. Z.B.  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$ ,  $\phi_{12}(x) = x$  definiert auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Man verklebt also alles außer den Nullpunkten, erhält also zwei 'Nullpunkte'. Das ist nicht Hausdorff, also nicht erlaubt. Parakompaktheit (wer die genaue Definition vergessen hat: macht nichts) dient in der Praxis nur dazu, die Existenz von Partitionen der Eins zu garantieren; diese werden zum Beispiel zur Definition des Integrals einer Differentialform benötigt.<sup>8</sup> Oft wird statt 'parakompakt' das 'zweite Abzählbarkeitsaxiom' gefordert. Dies ist eine stärkere Bedingung (für Hausdorff-Räume) und garantiert z.B. Einbettbarkeit der Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum.

<sup>4</sup>Für die pingeligen: Die disjunkte Vereinigung kann z.B. definiert werden als  $\bigcup_i V_i \times \{i\} \subset \mathbb{R}^n \times I$ , d.h. man betrachtet jedes  $V_i$  als in einem 'eigenen'  $\mathbb{R}^n$  liegend.

<sup>5</sup>Um sicherzustellen, dass dabei nicht mehr verklebt wird als gewünscht (z.B. zwei verschiedene Punkte desselben  $V_i$  miteinander, auf Umwegen über andere  $V_j$ ), sollte man annehmen, dass die Relation ' $p \sim q$ , falls  $p \in V_i$ ,  $q \in V_j$  und  $q = \phi_{ij}(p)$ , für gewisse  $i, j$ ' eine Äquivalenzrelation ist. Man sieht leicht, dass dies genau dann zutrifft, wenn für alle  $i, j, k$  gilt:  $\phi_{ii} = \text{id}_{V_i}$ ,  $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$  und  $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ , wo immer die linke Seite definiert ist.

<sup>6</sup>Man sollte auch nachprüfen, dass die so definierten offenen Mengen wirklich eine Topologie definieren. Einfache Übung!

<sup>7</sup>Auch hier sollte man einen geeigneten Äquivalenzbegriff einführen, vgl. Fußnote 3. Das überlasse ich der geeigneten Leserin.

<sup>8</sup>Alle Bedingungen einer Mannigfaltigkeit (allerdings mit Rand) außer Parakompaktheit erfüllt zum Beispiel die 'Lange Gerade': Man legt überabzählbar viele Intervalle  $[0, 1)$  hintereinander.

*Klarstellung:* Definition 2 ist meines Erachtens als Einstieg und Motivation besser geeignet als Definition 1. In der Literatur wird fast durchgehend Definition 1 verwendet, daher sollte man diese auch verstehen. Jedoch ist die unausgesprochene Intuition oft die von Definition 2.

## Überblick über ein paar Mannigfaltigkeitskonzepte

$M$  sei eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  lokale Koordinaten, definiert auf  $U$ . Summationsindices laufen immer von 1 bis  $n$ .

Name	Koordinatenfrei	Notation in Koordinaten	Intuition	Die Menge aller...
1. Funktion	$f: M \rightarrow \mathbb{R}$	$f(x)$		$C^\infty(M, \mathbb{R})$
2. Abbildung	$F: M \rightarrow N$	$F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$		$C^\infty(M, N)$
3. Tangentialvektor in $p$	$V_p = [\gamma]$ , Äquivalenzklasse <sup>a</sup> von Kurven durch $p$	$V_p = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big _p$ , $a_i \in \mathbb{R}$	Richtung (und Geschwindigkeit) bei $p^b$	$T_p M =$ Tangentialraum
4. Ableitung von $f$ in Richtung $V_p$	$V_p f(p) = \frac{d}{dt} \Big _{t=0} f(\gamma(t))$	$V_p f(p) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$	Wie schnell sich $f$ ändert, wenn man in Richtung (und Geschw.) $V_p$ läuft	
5. Vektorfeld	Ordnet jedem $p \in M$ ein $V_p \in T_p M$ zu	$\sum_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , $a_i \in C^\infty(U)$	Richtungs- (und Geschwindigkeits-) Feld	$C^\infty(M, TM)$
6. Kotangentialvektor in $p$	Linearform auf $T_p M$	$\sum_i a_i dx_i \Big _p$ , $a_i \in \mathbb{R}$	'Gerichtete Länge' bei $p^c$	$T_p^* M =$ Kotangentialraum
7. 1-form auf $M$	Ordnet jedem $p \in M$ ein $\omega_p \in T_p^* M$ zu	$\sum_i a_i(x) dx_i$ , $a_i \in C^\infty(U)$	eine Weise, gerichtete Länge für Kurven zu messen	$\Omega^1(M)$ oder $C^\infty(M, T^* M)$
8. 2-form auf $M$	Ordnet jedem $p \in M$ eine alternierende Bilinearform auf $T_p M$ zu	$\sum_{i,j} a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$	'gerichteter' Flächeninhaltsbegriff für Flächen in $M$	$\Omega^2(M)$
9. $n$ -form auf $M$	Ordnet jedem $p \in M$ eine alternierende $n$ -form auf $T_p M$ zu	$a(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$	'orientiertes Volumenmaß' für (meßbare) Teilmengen von $M$	$\Omega^n(M)$
10. Dichte auf $M$		$a(x)  dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n $	Volumenmaß für (meßbare) Teilmengen von $M$	$ \Omega(M) $

<sup>a</sup> $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ , und  $\gamma$  ist äquivalent zu  $\tilde{\gamma}$  falls in einem Koordinatensystem  $\gamma'(0) = \tilde{\gamma}'(0)$  gilt.

<sup>b</sup>oder 'infinitesimale Verschiebung' von  $p$

<sup>c</sup>oder: eine Hyperfläche in  $T_p M$ , und ein Begriff signierter Distanz von ihr

<sup>d</sup>Per Definition,  $(dx_i \wedge dx_j)(v, w) = v_i w_j - v_j w_i$ , falls  $v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $w = \sum w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

<sup>e</sup>Per Definition,  $(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(v_1, \dots, v_n) = \det(v_{ij})$ , falls  $v_i = \sum v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$

<sup>f</sup>Hier könnte was stehen, aber es lohnt sich nicht! (siehe z.B. ...)

## Weitere Bemerkungen zur Tabelle:

- *Glattheit:* Alle Objekte werden als glatt (unendlich oft differenzierbar) angenommen. Dabei ist Glattheit immer mit Hilfe lokaler Karten definiert. Z.B. ist eine Funktion glatt, wenn sie bzgl. jeder Karte glatt ist. Ein Vektorfeld ist glatt, wenn die Koeffizienten  $a_i$  bzgl. jeder Karte glatt sind, etc.
- *Zur lokalen Notation für Vektoren und 1-Formen:* Per Definition ist  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$  der 'Einheitsvektor in Richtung der  $x_i$ -Achse', also durch die Kurve  $t \mapsto p + te_i$ ,  $e_i =$  der  $i$ -te Standard-Basisvektor von  $\mathbb{R}^n$ , repräsentiert.

Die Notation ist durch die lokale Formel für die Richtungsableitung motiviert.

$dx_{i|p}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist die duale Basis zu  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Notation ist dadurch motiviert, dass  $dx_{i|p}$  auch das Differential der Koordinatenfunktion  $x_i$  im Punkte  $p$  ist (s. unten).

- *Koordinatenfrei  $\leftrightarrow$  in lokalen Koordinaten:* Um ein Konzept auf einer Mannigfaltigkeit zu definieren, kann man entweder eine koordinatenfreie Definition angeben, oder eine Definition in lokalen Koordinaten zusammen mit einer Transformationsregel. Die Notation ist meist so gewählt, dass die Transformationsregel automatisch aus ihr hervorgeht.

*Beispiel Tangentialvektoren:* Seien  $x$  und  $y$  Koordinatensysteme nahe  $p$ . Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

(vgl. (5), s. unten, mit  $F =$  Identität, wobei hier die  $y_i$  gleichzeitig als Funktionen von  $x$  und als lokale Koordinaten aufgefasst werden), woraus sofort die Transformationsregel

$$\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \iff b_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} a_j$$

folgt.

In Worten: Wechselt man von  $x$ - zu  $y$ -Koordinaten, muss man die Koeffizienten eines Vektors mit der Matrix  $\frac{\partial y}{\partial x}$  (deren  $(i, j)$ -Eintrag  $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$  ist) multiplizieren. (Hierbei werden die Koeffizienten  $(a_1, \dots, a_n)$  als Spaltenvektor aufgefasst.)

*Beispiel Kotangentialvektoren:* Das geht ganz ähnlich: Aus (4) folgt mit  $f = y_i$ :

$$dy_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1)$$

und daraus

$$\sum_j a_j dx_j = \sum_i b_i dy_i \iff a_j = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j} b_i. \quad (2)$$

Schaut man genau hin, sieht man, dass dies folgendes besagt: Die Koeffizienten eines Kotangentialvektors sind bei einem Koordinatenwechsel mit dem Inversen der Transponierten von  $\frac{\partial y}{\partial x}$  zu multiplizieren!

*Beispiel  $n$ -Formen und Dichten:* Aus (1) folgt sofort mit Hilfe der Leibniz-Formel für die Determinante:

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

also transformiert sich der Faktor  $a$  für  $n$ -Formen mit der Jacobi-Determinante des Koordinatenwechsels und für Dichten mit deren Absolutbetrag.

- *Intrinsische und nichtintrinsische Konzepte* (intrinsisch = von innen her kommend) Gewisse Konzepte sind für eine Mannigfaltigkeit intrinsisch, d.h. ohne weitere Zusatzdaten definiert. Das sind z.B. die Tangentialräume, die Kotangentialräume und die Ableitungsbegriffe. *Nicht* intrinsisch sind dagegen Begriffe wie Volumen oder Abstand. (Diese werden erst durch Vorgeben eines weiteren Datums, z.B. einer Riemannschen Metrik, wohldefiniert.)
- *Zu den Begriffen 'gerichtete Länge' etc.* Der Ursprung des 'Doppellebens' einer Differentialform als alternierende Multilinearform und als Flächen- (bzw. Längen- etc.)Maß ist die Tatsache, dass (z.B. für 2-Formen) die Fläche des Parallelogramms im  $\mathbb{R}^2$ , das von Vektoren  $v_1, v_2$  aufgespannt wird, gleich  $|\det(v_1, v_2)|$  ist und daher (bis auf das Vorzeichen) alternierend bilinear von  $v_1, v_2$  abhängt. Ein orientierter Flächeninhaltsbegriff auf einer Fläche definiert also eine 2-Form mittels  $\omega_p(v_1, v_2) :=$  Fläche des infinitesimalen  $(v_1, v_2)$ -Parallelogramms<sup>9</sup>, wobei  $v_1, v_2 \in T_p M$ . Umgekehrt definiert eine 2-Form  $\omega$  einen orientierten Flächeninhaltsbegriff: Schreibe lokal  $\omega = a(x) dx_1 \wedge dx_2$  und setze  $\text{Fläche}_\omega(A) = \int_A a(x) dx_1 dx_2$ , falls  $A$  in der Koordinatenumgebung liegt. Dies ist invariant definiert, da die Transformationsformel für 2-Formen genau der Formel für Koordinatenwechsel im Integral entspricht, falls die Jacobi-Determinante des Kartenwechsels positiv ist (daher 'orientiert').

Falls  $n > 2$ , so liefert eine 2-Form auf  $M$  durch Restriktion eine 2-Form auf jeder 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit und daher einen Flächeninhaltsbegriff für diese. 'Gerichtet' bedeutet, dass die ' $\omega$ -Fläche' eines

<sup>9</sup> d.h. in lokalen, orientierungserhaltenden Koordinaten

$$\omega_p(v_1, v_2) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \text{Fläche}(P_p(\epsilon v_1, \epsilon v_2)) / \epsilon^2, \quad (3)$$

wobei  $P_p(w_1, w_2)$  das Parallelogramm mit den Ecken  $p, p + w_1, p + w_1 + w_2, p + w_2$  ist. Der hier nicht exakt definierte Begriff 'Flächeninhaltsbegriff' soll insbesondere beinhalten, dass dies konvergiert und glatt von  $p$  abhängt.

kleinen Flächenelements sich ändert, wenn man es rotiert (insbesondere wird sie in manchen Richtungen null, in manchen positiv und in anderen negativ sein) – im Unterschied zum handelsüblichen Flächenbegriff.

Für 0-Formen (also Funktionen) ist Integration über 0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten einfach das 'gewichtete Zählen' von Punkten.

Dichten sind fast das gleiche wie  $n$ -Formen, nur ist deren Integral über eine Teilmenge auch dann definiert, wenn diese nicht orientiert ist.

## Ableitungsbegriffe

- *Funktionen:* Für die Richtungsableitung in einem Punkt siehe Tabelle. Ist  $f \in C^\infty(M)$  und  $V$  ein Vektorfeld, so folgt  $Vf \in C^\infty(M)$ . Alle Richtungsableitungen zusammen ergeben das *Differential in  $p$* :

$$df_p(V_p) := V_p f(p) \quad \text{für } V_p \in T_p M.$$

Dies ist offensichtlich linear in  $V_p$ , also ein Kotangententialvektor<sup>10</sup>. Natürlich ist  $df$  dann eine 1-Form, also ist  $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ . In lokalen Koordinaten ist

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (4)$$

- *Abbildungen  $F : M \rightarrow N$  zwischen Mannigfaltigkeiten:* Das Differential von  $F$  in  $p$  ist eine lineare Abbildung

$$dF|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

definiert durch  $dF|_p([\gamma]) = [F \circ \gamma]$ . Das heißt, um  $dF|_p(V_p)$  zu bestimmen, geht man von  $p$  in Richtung  $V_p$  und schaut sich an, in welche Richtung (und wie schnell) dabei der Bildpunkt wandert<sup>11</sup>. In lokalen Koordinaten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  auf  $M$  und  $y = (y_1, \dots, y_m)$  auf  $N$  ist, wenn man  $F = (F_1, \dots, F_m)$  bzgl. der  $y$ -Koordinaten schreibt:

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (5)$$

d.h. bzgl. der Standardbasen hat  $dF$  die Matrix  $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$ . (Dies folgt direkt aus der Kettenregel.)

Statt  $dF$  schreibt man oft  $F_*$  und nennt das 'Runterdrücken' (oder push-forward).  $F_*$  ist die 'kanonische Fortsetzung' von  $F : M \rightarrow N$  zu einer Abbildung  $TM \rightarrow TN$ .

<sup>10</sup>Das Differential ist die korrekte (d.h. invariant definierte) Version des Gradienten-Begriffs. Die Vorstellung aus Analysis II, dass der Gradient ein Vektor ist, der in die Richtung des steilsten Anstiegs von  $f$  zeigt, läßt sich nicht auf Mannigfaltigkeiten übertragen: Der Begriff 'steil' (Änderung von  $f$  pro Längeneinheit) bezieht sich auf Längenmessung, die auf einer Mannigfaltigkeit nicht definiert ist! (Führt man dagegen eine Riemannsche Metrik und damit Längenmessung ein, gibt es auch wieder einen Gradientenvektor.)

<sup>11</sup>Im Spezialfall  $N = \mathbb{R}$ , also für Funktionen, ist dies kompatibel mit dem oben gesagten, weil man  $T_q \mathbb{R}$  kanonisch mit  $\mathbb{R}$  identifizieren kann.

- *Differentialformen:* Was ist ein sinnvoller Begriff von 'Ableitung einer Differentialform  $\omega$  in Richtung eines Vektors  $V_p$ '? Betrachten wir z.B. eine 1-Form  $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ . Naiv würde man vielleicht an  $\sum_i (V_p \omega_i) dx_i$  denken. Doch das wäre nicht koordinateninvariant. D.h., schreibt man denselben Ausdruck in anderen Koordinaten hin, kommt etwas anderes heraus. (Grund: setzt man (2) ein, leitet  $V$  auch die Koeffizienten  $\partial y_i / \partial x_j$  ab.)

Versuchen wir also, die Ableitung einer Funktion *geometrisch* so zu verstehen, dass man sie invariant auf Formen verallgemeinern kann.

Dies geht auf (mindestens) zwei Weisen, die unterschiedliche Resultate liefern: Die äußere Ableitung und die Lie-Ableitung.

Wir betrachten nur 1-Formen, für Formen höheren Grades läuft alles ganz analog.<sup>12</sup>

*Lie-Ableitung  $L_V \omega$ :* Dies ist der intuitivere Ableitungsbegriff und leicht invariant zu definieren, durch direkte Verallgemeinerung der Formel  $df(V_p) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$ , für  $V_p = [\gamma]$ . Allerdings liegen für eine 1-Form  $\omega$  die  $\omega|_{\gamma(t)}$  für verschiedene  $t$  in verschiedenen Räumen (nämlich in  $T_{\gamma(t)}^* M$ ); bevor man ableiten kann, müssen diese erst identifiziert werden; es liegt nahe, dies mittels des Flusses eines Vektorfelds  $V$  zu tun, das bei  $p$  gerade den gegebenen Wert  $V_p$  hat. Beides zusammen (Auswerten bei  $\gamma(t)$  und Identifizieren) ist gerade im Begriff 'Zurückziehen von  $\omega$  mittels  $\exp tV$ ' enthalten, wobei  $\exp tV : M \rightarrow M$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , den Fluss von  $V$  bezeichnet<sup>1314</sup>. Also definieren wir

$$L_V \omega = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp tV)^* \omega.$$

Für ein Vektorfeld  $V$  und eine  $k$ -Form  $\omega$  ist das wieder eine  $k$ -Form.<sup>15</sup>

*Vorsicht:*  $(L_V \omega)(p)$  hängt nicht nur von  $V_p$ , sondern auch von den 'Ableitungen' von  $V$  in  $p$  ab. (Außer für  $k = 0$ .) Denn die Identifizierung von (Ko-)Vektoren bei  $\gamma(t)$  mit (Ko-)Vektoren bei  $\gamma(0) = p$  verwendet auch benachbarte Integralkurven und hängt daher davon ab, wie sich deren Position relativ zu  $\gamma$  ändert.

<sup>12</sup>Die Definition der Lie-Ableitung ist identisch, ebenso die iddi-Formel. Die äußere Ableitung einer  $k$ -Form  $\sum_I a_I dx_I$  ist die  $(k+1)$ -Form  $\sum_I \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$ . Die Charakterisierung (6) gilt analog.

<sup>13</sup>  $t \mapsto (\exp tV)(x)$  ist die Integralkurve von  $V$ , die bei  $x$  startet

<sup>14</sup>Ist  $F : M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $\omega$  eine 1-Form auf  $N$ , so ist per Definition  $(F^* \omega_p)(V_p) = \omega_{F(p)}(F_* V_p)$ .

<sup>15</sup>Charakterisiert man  $\omega$  durch den zugehörigen Längenbegriff  $\text{länge}_\omega(c) := \int_c \omega$ , für orientierte Kurven  $c$ , so gilt

$$\text{länge}_{L_V \omega}(c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{länge}_\omega((\exp tV)c),$$

d.h. man verschiebt  $c$  mittels  $V$  und sieht, wie sich dabei  $\text{länge}_\omega$  ändert.



Lokale Formel:<sup>16</sup>

$$\omega = \sum_i \omega_i dx_i, V = \sum_i V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \implies L_V \omega = \sum_{i,j} \left( V_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \omega_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

*Äußere Ableitung  $d\omega$* : Hier ist die lokale Formel einfacher, aber die geometrische Intuition etwas komplizierter.

Für eine 1-Form  $\omega$  ist  $d\omega$  eine 2-Form<sup>17</sup>. Es ist sehr unüblich (und wie wir gleich sehen werden auch nicht sehr natürlich), von der 1-Form  $d\omega(V, \cdot)$  als der 'äußeren Ableitung von  $\omega$  in Richtung  $V$ ' zu sprechen.

Motivation: Nehmen wir die Intuition einer Form als 'gerichtetes Längen/Flächen etc. -Maß' einmal ernst. Ist  $f$  eine Funktion (also eine Gewichtung für Punkte), so ordnet die 1-Form  $df$  einer Linie von  $p$  nach  $q$  den Wert  $f(q) - f(p)$  zu (Hauptsatz der Diff.u.Int.-Rechnung). Nimmt man speziell  $q = p + tV_p$  und läßt  $t \rightarrow 0$ , ergibt sich die übliche Formel für  $df_p(V_p)$ .

Es liegt nun nahe, dies so zu verallgemeinern: Für eine 1-Form  $\omega$  möchten wir:

$d\omega$  soll der gerichtete Flächeninhaltsbegriff sein, der einem Flächenstück  $A$  den 'Wert' von  $\omega$  auf dem Rand  $\partial A$  zuordnet.

(Dabei bestimmt eine Orientierung von  $A$  eine Orientierung von  $\partial A$ .) Daraus ließe sich eine Formel herleiten: In der Notation von (3) in Fußnote 9 sollte in lokalen Koordinaten

$$(d\omega)|_p(v_1, v_2) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{-2} \int_{\partial P_p(\epsilon v_1, \epsilon v_2)} \omega \quad (6)$$

sein.

Zum Rechnen eignet sich dies wenig, die übliche Definition ist nützlicher, aber ungeometrisch:

$$d\left(\sum_i a_i dx_i\right) := \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i. \quad (7)$$

Beide Formeln sind bzgl. lokaler Koordinaten geschrieben, aber das Resultat ist von deren Wahl unabhängig. Dass die in der Motivation geforderte Eigenschaft wirklich zutrifft, ist der Inhalt des Satzes von Stokes.

Neben (7) lohnt es sich auch, sich die Formel 'L gleich iddi' zu merken, die Lie-Ableitung und äußere Ableitung verknüpft:

$$L = \iota d + d\iota. \quad (8)$$

Soll heißen:  $L_V \omega = \iota_V d\omega + d(\iota_V \omega)$ . Hierbei bezeichnet  $\iota_V$  das 'Einsetzen von  $V$  als ersten Eintrag', also z.B. für eine 2-Form  $\alpha$  ist  $\iota_V \alpha$  die 1-Form  $(\iota_V \alpha)(W) = \alpha(V, W)$ , für eine 1-Form  $\omega$  ist  $\iota_V \omega = \omega(V)$ .<sup>18</sup>

<sup>16</sup>Bitte nicht auswendig lernen, lieber die iddi-Formel (8) verwenden!

<sup>17</sup>Insbesondere hängt  $(d\omega(V, W))_p$  nur von  $V_p$  und  $W_p$  ab, im Unterschied zur Lie-Ableitung.

<sup>18</sup>Für eine Funktion  $f$  ist  $\iota_V f = 0$ .

- *Vektorfelder*: Die Idee der Lie-Ableitung ergibt auch einen natürlichen Begriff der 'Ableitung eines Vektorfeldes  $X$  in Richtung eines Vektorfeldes  $V$ ':

$$L_V X := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp tV)^* X. \quad (9)$$

Hierbei ist für einen Diffeomorphismus  $\Phi$  das Vektorfeld  $\Phi^* X$  als  $(\Phi^{-1})_* X$  definiert. Diese Bezeichnung ist eher unüblich, daher liest man meist die Definition  $L_V X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp -tV)_* X$ .

Man kann nachrechnen, dass für eine Funktion  $f$  gilt:  $(L_V X)f = V(Xf) - X(Vf)$ . Daher wird auch oft die Bezeichnung

$$L_V X = [V, X] := VX - XV$$

verwendet, wobei die letzte Gleichheit im Sinne von Differentialoperatoren zu verstehen ist.

Man beachte, dass in  $L_V X$  nicht nur  $X$ , sondern auch  $V$  abgeleitet wird.

## Aus alt mach neu

Zu gegebenen Mannigfaltigkeiten und Abbildungen sind in natürlicher Weise weitere Mannigfaltigkeiten definiert. Seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $n$  bzw.  $m$  und  $F : M \rightarrow N$ . Per Definition ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  eine Teilmenge, die in einem lokalen Koordinatensystem eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist, also lokal Graph einer glatten Funktion.<sup>19</sup>

- Das *Tangentialbündel* an  $M$  ist  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  (disjunkte Vereinigung). D.h., ein Element von  $TM$  ist ein Paar  $(p, v)$  mit  $v \in T_p M$ . Definiere die Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $(p, v) \mapsto p$ . Ist  $(U, \kappa)$  eine Karte auf  $M$ , so definiert  $(\pi^{-1}U, \kappa_*)$  eine Karte auf  $TM$ , dies macht  $TM$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit (der Dimension  $2n$ ). Das heißt, die Koordinaten von  $(p, V_p)$  sind  $(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ , falls  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinaten von  $p$  sind und  $V_p = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ .
- Das *Kotangentialbündel* an  $M$ .  $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$ . Elemente sind Paare  $(p, \omega)$ ,  $\omega \in T_p^* M$ . Man hat wieder eine Projektion, die auch mit  $\pi : T^*M \rightarrow M$  bezeichnet wird. Karten sind  $(\pi^{-1}U, (\kappa^{-1})^*)$ , also hat  $(p, \omega_p)$  Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$ , falls  $\omega_p = \sum_i a_i dx_i \Big|_p$ .
- Das *Produkt*  $M \times N$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + m$ .
- *Niveaumengen*  $F^{-1}(q)$  von  $F$  sind Untermannigfaltigkeiten von  $M$ , falls  $q$  ein regulärer Wert von  $F$  ist, d.h. falls für alle  $p \in F^{-1}(q)$  das Differential  $dF_p : T_p M \rightarrow T_q N$  surjektiv ist. (Falls  $m = 1$  ist, bedeutet letzteres einfach  $dF_p \neq 0$ .)

---

<sup>19</sup>Dass dies dann auch in einem beliebigen Koordinatensystem gilt, folgt aus der Bemerkung unter 'Niveaumengen'.

Umgekehrt ist jede Untermannigfaltigkeit Niveaumenge einer solchen Abbildung, zumindest lokal.<sup>20</sup>

- Das *Bild*  $F(M)$  von  $F$ : Ist  $dF_p$  injektiv, so ist  $F(U)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  für eine Umgebung  $U$  von  $p$ . Ist  $dF_p$  für alle  $p$  injektiv, braucht  $F(M)$  keine Untermannigfaltigkeit zu sein, es kann z.B. Selbstüberschneidungen haben<sup>21</sup>. Solche Abbildungen nennt man *Immersionen* und  $F(M)$  'immersierte Untermannigfaltigkeit'.
- Der *Graph* von  $F$  ist die Untermannigfaltigkeit  $\{(p, F(p)), p \in M\}$  von  $M \times N$ .
- Die *Diagonale* in  $M \times M$  ist der Graph der Identität,  $\text{Diag}_M = \{(p, p), p \in M\}$ .

---

<sup>20</sup>Daß dies nicht immer global der Fall ist, zeigt das Beispiel:  $M = \text{Möbiusband } [0, 1] \times (-1, 1)$ , wobei  $(0, y)$  mit  $(1, -y)$  verklebt ist, der Äquator  $\{y = 0\}$  als Untermannigfaltigkeit.

<sup>21</sup>Ein Beispiel ohne Selbstüberschneidung, das dennoch keine Untermannigfaltigkeit ist, ist durch  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  (der Torus),  $F(t) = (at, bt) \bmod \mathbb{Z}^2$ , gegeben, für reelle Zahlen  $a, b$  mit irrationalem Quotienten  $a/b$ .