Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal

Dietmar Pfeifer
Institute of Mathematics, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, D-26111 Oldenburg, Germany (1967 / 2022), Update: January 8, 2024

Abstract

In this note we present a simple elementary approximate construction of the regular heptagon with ruler and compass. The original idea goes back to calculations which I have made during school time in 1967 at the age of 14 years.

Keywords: regular heptagon, constructions with ruler and compass

MSC: 01A40

1. Einleitung

Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke sind schon seit der Antike bekannt, vgl. Scriba und Schreiber (2010) oder Johnson und Pimpinelli (2008). Exakte Konstruktionen regelmäßiger *n*-Ecke sind aber nur dann möglich, wenn, wie schon Gauß zeigte, n die Form $n = 2m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ besitzt, wobei $m, k \in \mathbb{N}$ und die p_i paarweise verschiedene Primzahlen der Form $p_i = 2^j + 1$ sind, vgl. Scriba und Schreiber (2010), S. 405. Grundsätzlich sind die „Ecken" regelmäßiger *n*-Ecke in der komplexen Ebene Lösungen der so genannten Kreisteilungsgleichung

$$(x-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - 1 = 0$$

Im Fall des regelmäßigen Siebenecks kann man die Gleichung

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

nach Division durch x^3 und der Substitution $z = x + \dfrac{1}{x}$ überführen in die „einfachere" kubische Gleichung

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

(vgl. Geretschläger). Durch Reduktion auf die reduzierte Form mittels $z = y - \dfrac{1}{3}$ geht dies über in

$$f(y) := y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{7}{27} = 0.$$

Dies entspricht dem *Casus irreducibilis*.

Eine einfache approximative Lösung erhält man hieraus durch Vernachlässigung des Terms y^3 vermöge $-\frac{7}{3}y - \frac{7}{27} = 0$ mit der Lösung $y_0 = -\frac{1}{9}$ und $f(y_0) = -\frac{1}{729} = -0{,}001371...$, also $z = -\frac{4}{9}$, was zur ersten approximativen Lösung

$$x_{1,2} = -\frac{2}{9} \pm \frac{i}{9}\sqrt{77}$$

führt. Zur Fehlerabschätzung: es ergibt sich

$$x_{1,2}^7 = \left(-\frac{2}{9} \pm \frac{i}{9}\sqrt{77}\right)^7 = \frac{4.782.958}{4.782.969} \mp \frac{1.169}{4.782.969}\sqrt{77}i$$

$$= 0{,}999997... \mp 0{,}002144...i$$

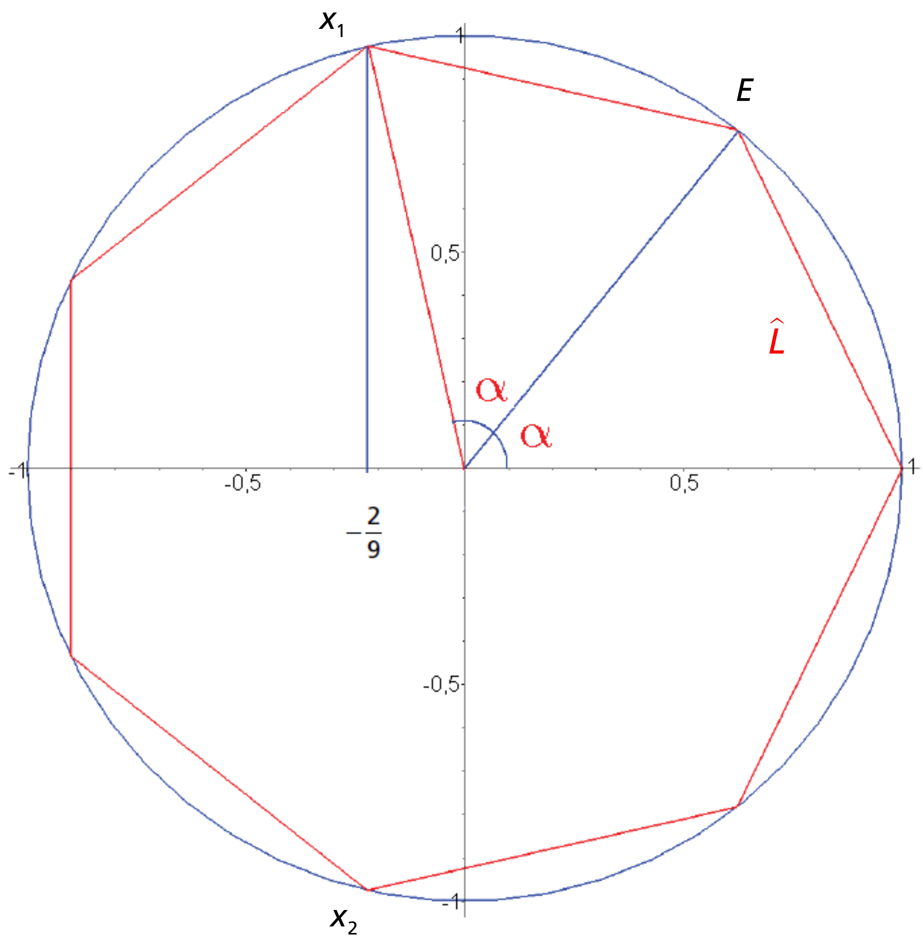
Die erste „Ecke" E gegen den Uhrzeigersinn erhält man aus x_1 durch Winkelhalbierung. Für den zugehörigen Winkel α gilt: $2\cos^2(\alpha) - 1 = \cos(2\alpha)$ und damit

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{9}}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{14}$$

sowie $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{6}\sqrt{22}$. Die Länge $\hat{L}$ der ersten Sehne des approximativen Siebenecks gegen den Uhrzeigersinn ergibt sich somit zu

$$\hat{L} = \sqrt{\sin^2(\alpha) + (1-\cos(\alpha))^2} = \frac{1}{3}\sqrt{18 - 3\sqrt{14}} = 0{,}867629...$$

Der exakte Wert ist $L = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0{,}867767...$ Der relative Fehler beträgt also nur $-0{,}015905...\%$.



Eine weitere Verbesserung ergibt sich aus dem Ansatz $y_0 = -\frac{1}{9} + h$ mit $f(y_0) = -\frac{1}{729} - \frac{62}{27}h - \frac{1}{3}h^2 + h^3$. Vernachlässigt man hier den Term h^3 und löst damit $-\frac{1}{729} - \frac{62}{27}h - \frac{1}{3}h^2 = 0$, so erhält man als einzig sinnvolle Lösung $h = -\frac{31}{9} + \frac{1}{27}\sqrt{8646}$ bzw. $y_0 = -\frac{32}{9} + \frac{1}{27}\sqrt{8646}$ mit $f(y_0) = -0{,}213229\ldots \cdot 10^{-9}$ sowie analog

$$x_{1,2} = -\frac{35}{18} + \frac{1}{54}\sqrt{8646} \pm \frac{1}{54}\sqrt{210\sqrt{8646} - 16755}\,i$$

mit $x_{1,2}^7 = 0{,}9999999993 - 0{,}6710439934 \cdot 10^{-8}\,i$.

Hiermit erhält man als neue approximative Sehnenlänge

$$\hat{L} = \sqrt{\sin^2(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))^2} = \frac{1}{3}\sqrt{18 - \sqrt{3\sqrt{8646} - 153}} = 0{,}867767478213\ldots$$

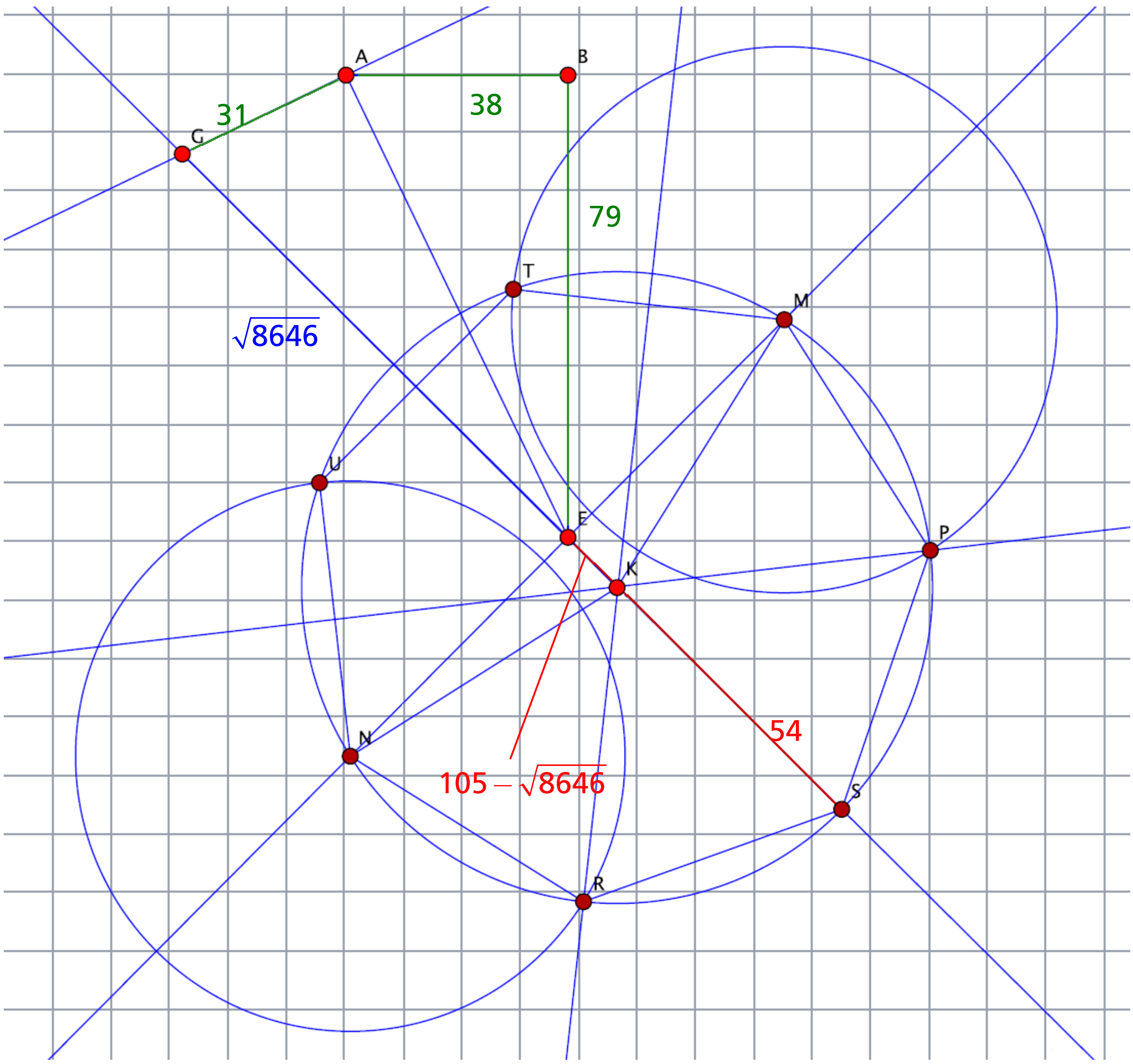
im Vergleich zu

$$L = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0{,}86776747823 5\ldots$$

mit einem relativen Fehler von nur noch $-0{,}247268\ldots \cdot 10^{-8}\,\%$. Theoretisch wäre die „Ecke“ x_1 auch noch mit Zirkel und Lineal konstruierbar, da ihr Realteil

$$\Re(x_1) = -\frac{35}{18} + \frac{1}{54}\sqrt{8646} = -0{,}22252093391 \approx -0{,}22252093396 = \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

(der exakte Wert), nur eine Quadratwurzel enthält (mit $8646 = 79^2 + 38^2 + 31^2$), in einer praktischen Durchführung würde das aber im Vergleich zu der ersten Lösung wohl relativ ungenau.



Man beachte, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, die Zahl 8646 als Summe von drei Quadratzahlen darzustellen, etwa

$$8646 = 31^2 + 38^2 + 79^2 = 31^2 + 31^2 + 82^2 = 14^2 + 23^2 + 89^2 = 14^2 + 35^2 + 85^2$$
$$= 5^2 + 61^2 + 70^2.$$

Zur Verdeutlichung der Güte der Approximation: hätte der obige Kreis einen Radius von 54.000 km, würde sich die approximative von der exakten Sehnenlänge nur um ca. 1 mm unterscheiden!

Literatur

D. Dureisseix. Searching for Optimal Polygon - Remarks About a General Construction and Application to Heptagon and Nonagon. 1997. hal-01246939. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01246939

R. Geretschläger: Folding the Regular Heptagon. In: Crux Mathematicorum. Band 23, Nr. 2. Canadian Mathematical Society, März 1997, Kap. 4, S. 81–88.

A. M. Gleason: Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. The American Mathematical Monthly, Volume 95, Issue 3 (Mar., 1988), 185-194.

W.R. Hamilton: On Röber's construction of the heptagon. Philosophical Magazine, 27 (1864), S. 124–132.

A. Johnson, A. Pimpinelli: Pegs and Ropes: Geometry at Stonehenge. Nat Prec (2008). https://doi.org/10.1038/npre.2008.2153.1

C.J.Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. 3. Aufl. 2010, Springer, Heidelberg.