Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Neunecks mit Zirkel und Lineal

Dietmar Pfeifer
Institute of Mathematics, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, D-26111 Oldenburg, Germany (2024)

Abstract

In this note we present a simple elementary approximate construction of the regular nonagon with ruler and compass. The underlying idea goes back to my papers „Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal" and „Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Elfecks mit Zirkel und Lineal".

Keywords: regular nonagon, constructions with ruler and compass

MSC: 01A40

1. Einleitung

Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke sind schon seit der Antike bekannt. Exakte Konstruktionen regelmäßiger n-Ecke sind aber nur dann möglich, wenn, wie schon Gauß zeigte, n die Form $n = 2m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ besitzt, wobei $m, k \in \mathbb{N}$ und die p_i paarweise verschiedene Primzahlen der Form $p_i = 2^j + 1$ sind, vgl. Scriba und Schreiber (2010), S. 405. Grundsätzlich sind die „Ecken" regelmäßiger n-Ecke in der komplexen Ebene Lösungen der so genannten Kreisteilungsgleichung

$$x^n - 1 = 0.$$

In der Arbeit „Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal" wurde gezeigt, dass eine approximativen Lösung dieser Gleichung für $n = 7$ gegeben ist durch

$$x_0 = -\frac{2}{9} + \frac{i}{9}\sqrt{77}$$

mit der Fehlerabschätzung

$$x_0^7 = \left(-\frac{2}{9}+\frac{i}{9}\sqrt{77}\right)^7 = \frac{4.782.958}{4.782.969} - \frac{1.169}{4.782.969}\sqrt{77}i$$

$$= 0{,}999997... - 0{,}002144...i$$

Im Falle $n = 9$ ist eine approximative Lösung gegeben durch

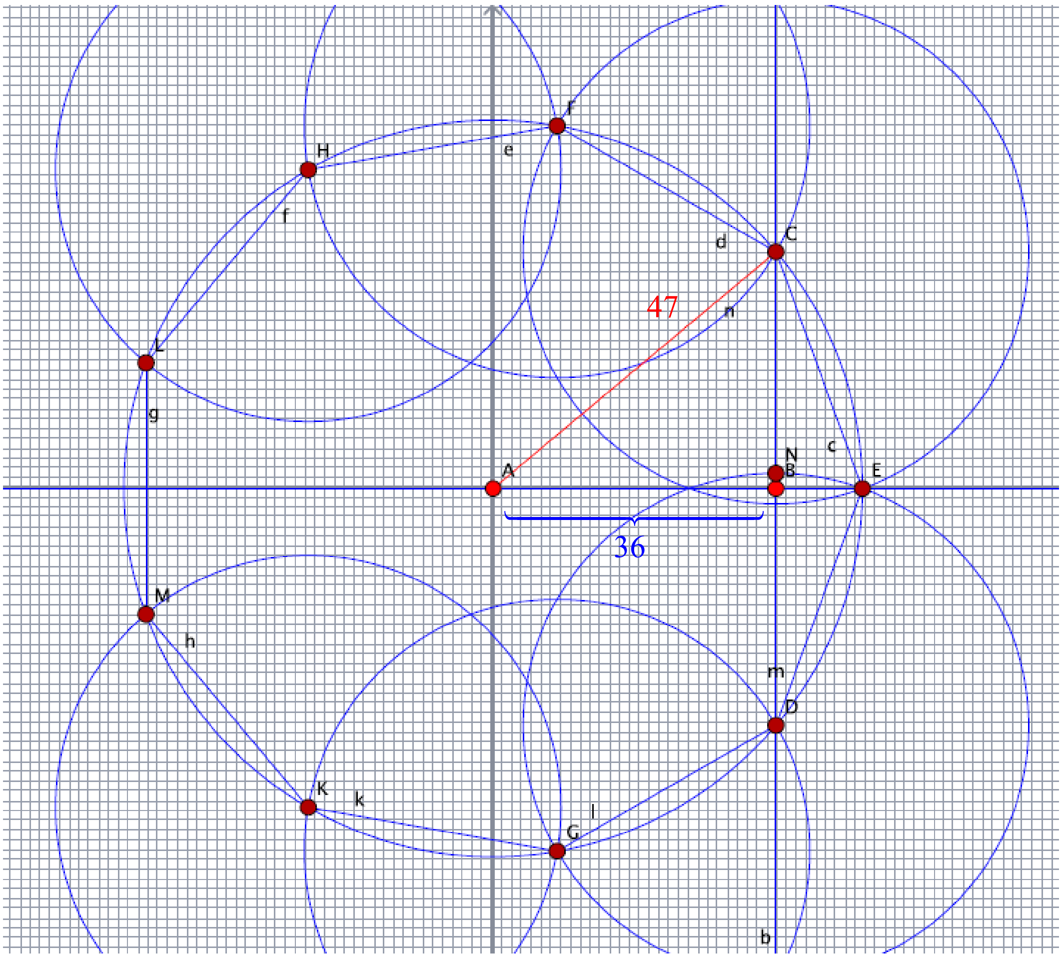
$$x_0 = \frac{36}{47} + \frac{1}{47}\sqrt{913}\,i$$

(erste „Ecke" entgegen dem Uhrzeigersinn) mit der Fehlerabschätzung

$$x_0^9 = \left(\frac{36}{47}+\frac{1}{47}\sqrt{913}\,i\right)^9 = \frac{1.119.129.642.999.108}{1.119.130.473.102.767} + \frac{45.111.373.825}{1.119.130.473.102.767}\sqrt{913}\,i$$

$$= 0{,}999999258... + 0{,}001217981...i$$

Die nachfolgende Grafik zeigt die geometrische Konstruktion:



Für die sich hieraus ergebende Sehnenlänge $\hat{L}$ für das approximative Neuneck erhält man demnach $\hat{L} = \frac{\sqrt{1034}}{47} = 0{,}684167...$, die exakte Sehnenlänge L beträgt dagegen $L = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0{,}684040...$. Der relative Fehler beträgt also $0{,}0859...\%$.

Zur Verdeutlichung der Güte der Approximation: hätte der obige Kreis einen Radius von 47 m, würde sich die approximative von der exakten Sehnenlänge nur um ca. 6 mm unterscheiden!

Literatur

D. Pfeifer: Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal. Unveröffentlichtes Manuskript (2022), http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/P123.pdf

D. Pfeifer: Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Elfecks mit Zirkel und Lineal. Unveröffentlichtes Manuskript (2022), http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/P124.pdf

C.J.Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. 3. Aufl. 2010, Springer, Heidelberg.