Zur Approximation von gemischten durch einfache Poisson-Prozesse

Dietmar Pfeifer (Aachen)

1. Einführung

Gemischte Poisson-Prozesse spielen in der Versicherungsmathematik eine bedeutende Rolle insbesondere als Modelle für Schadenszahlprozesse z. B. im Bereich der Sach- und Krankenversicherung [Lundberg (1940)]. Dementsprechend wichtig sind die Untersuchung struktureller Eigenschaften [u.a. Albrecht (1981), Heller und Pfeifer (1987)] sowie statistische Analysen solcher Prozesse [u.a. Albrecht (1980), (1982)]. In der vorliegenden Arbeit soll nun untersucht werden, inwieweit gemischte Poisson-Prozesse durch einfache Poisson-Prozesse angenähert werden können, und Abschätzungen für ein geeignetes Abstandsmaß hergeleitet werden. Hierbei läßt sich zeigen, daß die Varianz der Mischungsverteilung von zentraler Bedeutung ist. Als Hilfsmittel wird auf die Theorie Poissonscher Punktprozesse zurückgegriffen, welche eine sehr elegante (und weitestgehend dimensionslose) Darstellung erlaubt.

2. Grundzüge der Theorie Poissonscher Punktprozesse

Wir folgen hier im wesentlichen den Ausführungen in Kallenberg (1976), Karr (1986) oder Neveu (1977).

Definition. Es sei (E, δ) ein separabler, vollständiger metrischer Raum*) und μ ein σ-endliches Maß auf der von der Metrik δ induzierten Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}$, d.h. es gibt eine aufsteigende Folge $\{B_n\}$ Borelscher Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = E$ und $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine durch die Borelschen Mengen in E indizierte Familie $\xi(A)$, $A \in \mathscr{B}$ von Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}^+$ heißt Poissonscher Punktprozess, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

i) $\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n)$ für jede Familie $\{A_n\} \subseteq \mathscr{B}$ paarweise disjunkter Mengen;

ii) $\{\xi(A_n)\}$ sind stochastisch unabhängig für jede Familie $\{A_n\} \subseteq \mathscr{B}$ paarweise disjunkter Mengen;

iii) $\xi(A)$ ist für jede Menge A mit $\mu(A) < \infty$ Poisson-verteilt mit Parameter $\mu(A)$.

μ heißt auch das zu ξ gehörige Intensitätsmaß.

Unter den an (E, δ) gestellten Forderungen existieren solche Poisson-Prozesse und sind durch i) bis iii) auch (verteilungsmäßig) eindeutig bestimmt. Die Bedingung i) besagt dabei, daß $\xi(.)$ aus als zufälliges Maß, d.h. als Zufallsvariable mit Werten in $\mathscr{M}$ aufgefaßt werden kann, wobei $\mathscr{M}$ die Menge aller σ-endlichen Maße auf $\mathscr{B}$ bezeichne.

---

*) D.h. δ ist eine Metrik auf $E \times E$, und jede Cauchy-Folge in E konvergiert bzgl. dieser Metrik. Beispiele sind die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. der Vektorraum $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ mit dem üblichen Euklidischen Abstand als Metrik.

Anschaulich läßt sich ein Poissonscher Punktprozeß als Zählprozeß interpretieren, wobei $\xi(A)$ die Anzahl der in der Menge $A \in \mathscr{B}$ aufgetretenen „Punkte“ angibt. $\mu(A)$ ist hierbei gleichzeitig die mittlere Anzahl von beobachteten Punkten in A.
Den üblichen homogenen Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$ erhält man nun etwa durch die Wahl $E = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda m$, wobei m das gewöhnliche Lebesguesche Maß bedeutet. Setzt man noch speziell

$$N(t) = \xi([0, t]), \quad t \geqq 0, \tag{1}$$

so erhält man den üblicherweise im reellen Fall betrachteten Zählprozeß $\{N(t) \mid t \geqq 0\}$ des homogenen Poisson-Prozesses. Nicht-homogene Poisson-Prozesse mit Intensität $\lambda(t)$, $t > 0$ ergeben sich analog vermöge

$$\mu(A) = \int_A \lambda(t)\, dt, \quad A \in \mathscr{B}. \tag{2}$$

Analog zu den Poissonschen Punktprozessen lassen sich gemischte (auch: doppelt-stochastische) Poissonsche Prozesse definieren. Hierbei ist lediglich das Intensitätsmaß μ durch ein zufälliges Maß ν zu ersetzen. Ein gemischter Poissonscher Punktprozeß wird also in zwei Stufen realisiert:
1. Eine Auswahl eines Intensitätsmaßes μ als Realisierung des zufälligen Maßes ν.
2. Eine Realisierung des Poissonschen Punktprozesses mit Intensitätsmaß μ.
Im reellen Fall erhält man etwa durch die Wahl

$$\nu = \Lambda m, \tag{3}$$

wobei Λ eine positiv-wertige Zufallsvariable ist, den üblichen gemischten Poisson-Prozeß mit Mischungsvariable Λ zurück.
Das folgende Resultat verallgemeinert die für reelle Poisson-Prozesse bekannten strukturellen Eigenschaften [vgl. Albrecht (1985)].

Satz 1. Es sei ξ ein Poissonscher Punktprozeß mit Intensitätsmaß μ und $A \in \mathscr{B}$ derart, daß $0 < \mu(A) < \infty$. Unter der Bedingung $\xi(A) = n \in \mathbb{N}$ verhält sich dann der Poissonsche Prozeß ξ auf allen Borelschen Teilmengen B von A wie ein diskretes Maß mit n Trägerpunkten $X_1, \ldots, X_n$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in A und Verteilung

$$P(X_i \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad B \subseteq A \tag{4}$$

sind.
Für den Fall $E = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda m$ besagt Satz 1 gerade, daß für jedes Intervall $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$ unter Bedingung, daß der Prozeß n Punkte in A realisiert hat, diese unabhängig voneinander gemäß

$$P(a < X_i \leqq t) = \frac{\lambda m((a, t])}{\lambda m((a, b])} = \frac{t-a}{b-a}, \quad a < t < b \tag{5}$$

verteilt sind, d. h. einer unabhängigen Stichprobe mit stetiger Gleichverteilung über A entstammen, und zwar unabhängig von der Wahl von λ. Aufgrund der doppelt-stochastischen Struktur gemischter Poissonscher Punktprozesse gilt dasselbe dann auch für Mischungen der Form (3), d. h. ein Beobachter, der nur solche Ereignisse betrachtet, bei denen ein derartiger gemischter Poisson-Prozeß n Punkte in A realisiert, kann keinerlei Aussagen über Λ treffen! (dies ist u. a. ein Grund für die gleichzeitige Charakterisierung gemischter wie nicht-gemischter Poisson-Prozesse durch solche Eigenschaften; vgl. etwa Albrecht (1985)).

3. Approximation gemischter durch einfache Poisson-Prozesse

Wir wollen uns hier auf Poissonsche Punktprozesse ξ mit Intensitätsmaß μ der Form

$$\mu = \lambda\,\tau, \quad \lambda > 0 \tag{6}$$

und gemischte Poisson-Prozesse ζ mit zufälligem Intensitätsmaß ν der Form

$$\nu = \Lambda\,\tau \tag{7}$$

beschränken, wobei τ ein festes σ-endliches Maß auf $\mathscr{B}$ bezeichne (z.B. $\tau = m$ im Fall $E = \mathbb{R}$), und Λ eine positiv-wertige Zufallsvariable mit endlicher Varianz σ^2 sei. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit man solche gemischten Poisson-Prozesse ζ auf einer Teilmenge $A \in \mathscr{B}$ durch einen geeigneten Poisson-Prozeß mit „Paramter" λ approximieren kann, und welchen „Fehler" man bei einer solchen Approximation begeht.
Hierzu wollen wir das Abstandsmaß $D_A(\xi, \zeta)$ betrachten, welches definiert ist durch

$$D_A(\xi, \zeta) = \sup_{\mathscr{N} \in \mathscr{C}} |P(\xi(.\cap A) \in \mathscr{N}) - P(\zeta(.\cap A) \in \mathscr{N})|, \tag{8}$$

wobei $\mathscr{C}$ eine geeignete σ-Algebra über $\mathscr{M}$ ist.
$D_A(\xi, \zeta)$ spiegelt damit einen „pessimistischen" Abstandsbegriff wider, der die „größtmögliche" Abweichung zwischen den Prozessen ξ und ζ auf A erfaßt.
Für die σ-Algebra $\mathscr{C}$ wählt man hier zweckmäßigerweise die kleinste σ-Algebra, bezüglich der die Abbildungen $\mu \to \mu(B)$ meßbar sind (für alle $B \in \mathscr{B}$ und $\mu \in \mathscr{M}$). Wegen der Separabilität des Raumes (E, δ) fällt dann (8) mit dem anschaulicheren Abstandsmaß

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{B_1, \ldots, B_k \subseteq A \\ B_i \in \mathscr{B}}} \sup_{M \subseteq \mathbb{Z}^{+k}} |P((\xi(B_1), \ldots, \xi(B_k)) \in M) - P((\zeta(B_1), \ldots, \zeta(B_k) \in M)| \tag{9}$$

zusammen.
Definiert man analog für beliebige Zufallsvariablen X, Y mit Werten in einem Meßraum $(T, \mathscr{T})$

$$d(X, Y) = \sup_{A \in \mathscr{T}} |P(X \in A) - P(Y \in A)|, \tag{10}$$

so läßt sich das folgende Resultat zeigen.

Satz 2. Mit den Bezeichnungen (8) gilt

$$D_A(\xi, \zeta) = d(\xi(A), \zeta(A)), \tag{11}$$

d.h. der Abstand der Prozesse ξ und ζ fällt mit dem Abstand der Zufallsvariablen zusammen, welche die jeweiligen Punkte in A zählen.

Beweis. Gemäß Satz 1 und den im Anschluß daran gemachten Bemerkungen stimmen für jede Menge $\mathscr{N} \in \mathscr{C}$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(\xi(.\cap A) \in \mathscr{N} \mid \xi(A) = n) = P(\zeta(.\cap A) \in \mathscr{N} \mid \zeta(A) = n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

überein; man überlegt sich leicht, daß dies dann auch noch für $n = 0$ der Fall ist. Wir erhalten damit für jede beliebige Menge $\mathcal{N} \in \mathscr{C}$

$$
\begin{aligned}
&|P(\xi(.\cap A) \in \mathcal{N}) - P(\zeta(.\cap A) \in \mathcal{N})| \\
&= \tfrac{1}{2}\{|P(\xi(.\cap A) \in \mathcal{N}) - P(\zeta(.\cap A) \in \mathcal{N})| + |P(\xi(.\cap A) \notin \mathcal{N}) - P(\zeta(.\cap A) \notin \mathcal{N})|\} \\
&\leqq \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi(.\cap A) \in \mathcal{N} \mid \xi(A) = n)\,|P(\xi(A) = n) - P(\zeta(A) = n)| + \ldots\right. \\
&\qquad\left. + \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi(.\cap A) \notin \mathcal{N} \mid \xi(A) = n)\,|P(\xi(A) = n) - P(\zeta(A) = n)|\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} |P(\xi(A) = n) - P(\zeta(A) = n)| = d(\xi(A), \zeta(A))
\end{aligned}
$$

[vgl. z. B. Serfling (1975), (1978)]. Da $\mathcal{N}$ beliebig war, folgt somit

$$D_A(\xi, \zeta) \leqq d(\xi(A), \zeta(A)).$$

Wählen wir andererseits speziell $\mathcal{N} = \{\hat{\zeta} \mid \hat{\zeta}(A) = \xi(A)\} \in \mathscr{C}$, wobei $\hat{\zeta}$ alle gemischten Poisson-Prozesse mit zufälligen Intensitätsmaßen ν durchläuft, so ergibt sich mit der Doeblin-Ungleichung

$$d(X, Y) \leqq P(X \neq Y) \quad \text{[vgl. Serfling (1975), (1978)]}$$

hier

$$
\begin{aligned}
&d(\xi(A), \zeta(A)) \leqq P(\xi(A) \neq \zeta(A)) \leqq P(\zeta(.\cap A) \notin \mathcal{N}) \\
&\quad = 1 - P(\zeta(.\cap A) \in \mathcal{N}) = P(\xi(.\cap A) \in \mathcal{N}) - P(\zeta(.\cap A) \in \mathcal{N}) \leqq D_A(\xi, \zeta).
\end{aligned}
$$

Der Satz ist damit bewiesen.
Nach Voraussetzung ist nun aber $\xi(A)$ Poisson-verteilt mit Erwartungswert $E(\xi(A)) = \lambda\tau(A)$, während $\zeta(A)$ einer gemischten Poisson-Verteilung genügt mit Mischungsvariablen $\Lambda\tau(A)$. Wählt man nun beispielsweise $\lambda = E(\Lambda)$, so folgt [vgl. Pfeifer (1985), Corollary 1]

$$D_A(\xi, \zeta) = d(\xi(A), \zeta(A)) \leqq \mathrm{Var}(\Lambda\,\tau(A)) = \sigma^2\,\tau(A)^2. \tag{13}$$

Wir erhalten damit:

Folgerung. Mit den Bezeichnungen (8) gilt, wenn $\lambda = E(\Lambda)$ gewählt wird:

$$D_A(\xi, \zeta) \leqq \sigma^2\,\tau(A)^2. \tag{14}$$

Ist beispielsweise $\tau = m$ das Lebesgue-Maß und $A = [a, b] \in \mathbb{R}^+$ ein Intervall, so ergibt sich

$$D_{[a,b]}(\xi, \zeta) \leqq \sigma^2(b - a)^2. \tag{15}$$

Im Falle des Pólya-Prozesses mit Intensitäten

$$\lambda_n(t) = \lambda\,\frac{1 + \alpha n}{1 + \alpha\lambda t}, \quad n, t \geqq 0 \quad (\alpha, \lambda > 0) \tag{16}$$

erhalten wir etwa $E(\Lambda) = \lambda$, $\sigma^2 = \alpha\,\lambda^2$, so daß (15) übergeht in

$$D_{[a,b]}(\xi, \zeta) \leqq \alpha\,\lambda^2(b - a)^2. \tag{17}$$

Aus den obigen Ausführungen ergibt sich, daß eine erwartungstreue Approximation gemischter Poisson-Prozesse durch einfache Poisson-Prozesse vor allem dann in Betracht kommt, wenn die Varianz der Mischungsvariablen Λ klein oder die Länge des betrachteten Intervalls [a, b] (allgemeiner: das Maß $\tau(A)$ der Menge (A)) klein ist. Die Abschätzung (14) läßt sich bei der Wahl von $\lambda = E(\Lambda)$ i.a. nicht wesentlich verbessern, wie man den Ausführungen von Pfeifer (1985) entnehmen kann. Allerdings kann die obere Schranke in (14) gelegentlich noch verbessert werden, wenn statt der erwartungstreuen Wahl $\lambda = E(\Lambda)$ z.B.

$$\lambda = E(\Lambda) - \frac{\sigma^2 \tau(A)^2}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2 \tau(A)^2}} \tag{18}$$

gesetzt wird, sofern die rechte Seite positiv bleibt [Pfeifer (1985), Corollary 3].

LITERATURVERZEICHNIS

Albrecht, P. (1980): Statistische Analyse des homogenen und des inhomogenen Poissonprozesses. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik XIV, 585–610.

Albrecht, P. (1981): Über einige Eigenschaften des gemischten Poissonprozesses. Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, 241–250.

Albrecht, P. (1982): Zur Statistischen Analyse des gemischten Poissonprozesses, gestützt auf Schadeneintrittszeitpunkte. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik XV, 245–257.

Albrecht, P. (1985): Mixed Poisson Process. in: Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 5, 556–559. Wiley, New York.

Heller, U. und *Pfeifer, D.* (1987): A martingale characterization of mixed Poisson processes. Erscheint in: J. Appl. Prob.

Kallenberg, O. (1976): Random Measures. Acad. Press, London.

Karr, A. F. (1985): Point Processes and Their Statistical Inference. M. Dekker, New York.

Lundberg, O. (1940): On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics. Reprint by Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1964.

Neveu, J. (1977): Processus Ponctuels. In: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VI-1976, 250–445. Lecture Notes in Mathematics, Band 598, Springer.

Pfeifer, D. (1985): On the distance between mixed Poisson and Poisson distributions. Technical Report No. 115, University of North Carolina at Chapel Hill.

Serfling, R. J. (1975): A general Poisson approximation theorem. Ann. Prob. 3, 726–731.

Serfling, R. J. (1978): Some elementary results on Poisson approximation in a sequence of Bernoulli trials. SIAM Review 20, 567–579.

Zusammenfassung

Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine Approximation gemischter durch einfache Poisson-Prozesse sinnvoll ist, und eine Abschätzung für ein geeignetes Abstandsmaß hergeleitet. Hierbei spielt die Varianz der Mischungsverteilung eine zentrale Rolle.

Summary

We investigate the approximation of mixed Poisson by Poisson processes and present an estimation for the corresponding total variation distance. The variance of the mixing distribution turns out to be of central interest.

Kurzmitteilungen

Bemerkung zur Approximation von gemischten durch einfache Poisson-Prozesse

Dietmar Pfeifer (Aachen)

In der Arbeit [2] des Autors wurde gezeigt, daß der Abstand in Totalvariation D_A zwischen einem gemischten Poisson-Prozeß ζ und einem einfachen Poisson-Prozeß ξ auf einer Borel-Menge A mit dem entsprechenden Abstand d der Zufallsvariablen $\zeta(A)$ und $\xi(A)$, welche die in A beobachteten Punkte zählen, übereinstimmt. Der Beweis der in Satz 2 benötigten Ungleichung

$$d(\zeta(A), \xi(A)) \leqq D_A(\zeta, \xi) \tag{1}$$

ist allerdings in der angegebenen Form nicht korrekt, da die dort betrachtete Menge $\mathcal{N}$ nicht in der σ-Algebra $\mathcal{E}$ liegt. Die Ungleichung folgt aber u.a. aus der Beziehung (9) in [2] (vgl. auch [1], wo jedoch A als abgeschlossen vorausgesetzt wird).

Der richtige Beweisgang für (1) ist wie folgt (mit den Bezeichnungen aus [2]):

Sei

$$\mathcal{N}_M = \{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu(A) \in M \text{ und } \mu(A^c) = 0\} \quad \text{für } M \subseteq \mathbb{Z}^+,$$

wobei A^c das Komplement der Menge A bezeichne. Wegen der Meßbarkeit der Abbildungen $\mu \to \mu(B)$ für Borel-Mengen B ist dann $\mathcal{N}_M \in \mathcal{E}$, so daß

$$P(\zeta(A) \in M) - P(\xi(A) \in M)| = |P(\zeta(. \cap A) \in \mathcal{N}_M - P(\xi(. \cap A) \in \mathcal{N}_M| \leqq D_A(\zeta, \xi). \tag{2}$$

Da M beliebig war, folgt die Behauptung.

Mit einer analogen Argumentation läßt sich direkt zeigen, daß der in (9) [2] angegebene Ausdruck ebenfalls eine untere Schranke für $D_A(\zeta, \xi)$ bildet, so daß insgesamt wegen der in Satz 2 [2] nachgewiesenen Gleichheit in (1) der Ausdruck (9) [2] ebenfalls mit $D_A(\zeta, \xi)$ übereinstimmt, und zwar ohne (i.a. sonst notwendige) topologische Zusatzeigenschaften von A.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Deheuvels, P.* und *Pfeifer, D.* (1987): Poisson approximations of multinomial distributions and point processes. Erscheint in: J. Multivar. Analysis.

[2] *Pfeifer, D.* (1986): Zur Approximation von gemischten durch einfache Poisson-Prozesse. Blätter der DGVM XVII, 429–433.