Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht

Dietmar Pfeifer, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Zusammenfassung: Spätestens seit der Verleihung des Nobelpreises für Ökonomie im Jahr 1997 an Myron Scholes und Robert Merton ist die zusammen mit Fischer Black[†] seit 1972 entwickelte Theorie der mathematischen Bewertung von Finanzderivaten in aller Munde. Hiervon zeugen auch die mehr als ein Dutzend allein seit 1996 erschienenen Monographien und Handbücher zu diesem Thema. In diesem Artikel soll aufgezeigt werden, daß und wie elementare Grundlagen der wesentlich mit Methoden der Stochastik arbeitenden modernen Finanzmathematik in der Schule vermittelt werden können.

1. Einleitung

Es begann wie so oft bei bahnbrechenden wissenschaftlichen Neuerungen: die Arbeit mit der fundamentalen Formel zu einer "objektiven" Bewertung von Aktien-Optionen, die zunächst von Fischer Black und Myron Scholes, später auch von Robert Merton seit Anfang der 70er Jahre entwickelt wurde, hatte damals in den führenden Journalen im Bereich der Ökonomie aufgrund allgemeinen Unverständnisses keine Chance auf Publikation; die Arbeit erschien schließlich im relativ unbekannten *Journal of Political Economy*. Erst mit der von J.C. Cox, A. Ross und M. Rubinstein 1979 vorgestellten Vereinfachung des Modells durch Binomialbäume erlangte das mathematische Konzept größere Akzeptanz; seitdem hat sich die Theorie rasant entwickelt und als inzwischen eigenständiger Bereich unter dem Stichwort *Stochastische Finanzmathematik* in der Mathematischen Stochastik fest etabliert.
Wenn die allgemeine Theorie auch recht anspruchsvoll und für den schulischen Gebrauch im allgemeinen sicher zu schwierig ist, lassen sich die wesentlichen Grundbegriffe aber doch mit elementaren stochastischen Methoden leicht vermitteln. Im folgenden soll aufgezeigt werden, wie dies sogar im Rahmen eines Grundkurses zur Stochastik geleistet werden kann. Wir beschränken uns dabei im wesentlichen auf die sogenannten *Europäischen Aktien-Optionen* im *Ein-Perioden-Modell*.

2. Ein grundlegendes Modell der Optionspreis-Theorie

Unter einer *Option* versteht man das Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Wirtschaftsguts zu einem im voraus festgesetzen Preis zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option). Darf das Recht *innerhalb einer bestimmten Frist* ausgeübt werden, spricht man von einer *Amerikanischen Option*; ist die Ausübung des Rechts auf einen *bestimmten Zeitpunkt* beschränkt, spricht man von einer *Europäischen Option*. Die Ausübung der Option hängt i.a. davon ab, wie sich der Preis des Wirtschaftsguts z.B. an der Börse entwickelt; im Fall einer Call-Option wird man diese vernünftigerweise etwa nur dann ausüben, wenn der Börsenpreis des Wirtschaftsguts über dem vereinbarten Kaufpreis liegt, so daß sich durch die entstehende Preisdifferenz ein Vorteil für den Inhaber der Option ergibt. Liegt der Börsenpreis dagegen unter dem vereinbarten Kaufpreis, wird man die Option sinnvollerweise nicht ausüben, da man das betreffende Wirtschaftsgut in diesem Fall billiger direkt an der Börse erwerben kann. Das zentrale Problem der Optionspreis-Theorie besteht nun darin, einen angemessenen monetären Gegenwert für den Erwerb einer Option und den damit in gewissen Fällen verbundenen finanziellen Vorteil für den Inhaber festzulegen.

Hier soll nur das einfachste Grundmodell einer Europäischen Option für eine Aktie [ohne Dividendenzahlung] vorgestellt werden. Es ist allerdings bereits ausreichend allgemein, um die wesentliche "Philosophie" der Optionspreis-Theorie zu verdeutlichen.

Für eine mathematische Formulierung des Problems sind die folgenden Bezeichnungen nützlich:

T:	die Laufzeit der Option; auch Verfalltag genannt (engl.: **t**ime)
X:	der im voraus vereinbarte Ausübungspreis (engl.: e**x**ercise price)
S_t:	der Kurswert der Aktie zur Zeit t, mit $0 \le t \le T$ (engl.: **s**tock price)
C_t:	der Wert der Call-Option zur Zeit t, mit $0 \le t \le T$
P_t:	der Wert der Put-Option zur Zeit t, mit $0 \le t \le T$

Die folgende Tabelle zeigt, welche Ausübungsstrategien für eine Call- bzw. Put-Option zum Verfalltag sinnvoll sind:

Call-Option:	$S_T > X$:	Option ausüben
	$S_T \leq X$:	Option nicht ausüben

Put-Option:	$S_T < X$:	Option ausüben
	$S_T \geq X$:	Option nicht ausüben

Da am Verfalltag die Börsenpreise bekannt sind, lassen sich hiermit C_T und P_T direkt angeben:

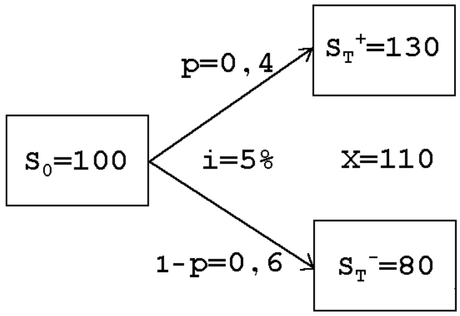
$$C_T = \max(S_T - X;0) = (S_T - X)^+$$

$$P_T = \max(X - S_T;0) = (X - S_T)^+$$

wobei $z^+ = \max(z,0)$ den Positivteil einer reellen Zahl z bezeichnet. C_T und P_T sind also genau dann positiv, wenn der Börsenpreis entweder oberhalb oder unterhalb des vereinbarten Kauf- bzw. Verkaufspreises liegt, weil genau dann die für den Inhaber der Option günstige Situation vorliegt, in der er einen Gewinn machen kann. Der Wert der Option ergibt sich folgerichtig als die Größe gerade dieses Gewinns. Wegen der Komplementarität von Call und Put erhalten wir noch die folgende fundamentale Beziehung:

$$\boxed{C_T - P_T = S_T - X \text{ (Put-Call-Parity-Relation)}}$$

Im folgenden betrachten wir das sog. *Ein-Stufen-Ein-Perioden-Modell*, d.h. wir gehen davon aus, daß der anfängliche Kurswert der Aktie S_0 bis zum Verfalltag T entweder auf den Wert $S_T^+ > S_0$ steigt oder auf den Wert $S_T^- < S_0$ fällt, wobei wir noch $S_T^- < X < S_T^+$ voraussetzen wollen. Die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs sei $p \in (0,1)$, entsprechend ist 1-p die Wahrscheinlichkeit für einen Kursverfall. Das folgende Beispiel ist dem Artikel von Eberlein (1998) entnommen.



Hier beträgt der Anfangskurs der Aktie 100, mit Wahrscheinlichkeit 0,4 steigt er auf den Wert 130 bzw. fällt mit Wahrscheinlichkeit 0,6 auf den Wert 80. Der Ausübungspreis betrage 110, der Zinssatz für die betrachtete Periode betrage 5%. Welchen Preis C_0 sollte der Käufer einer entsprechenden Call-Option bezahlen?

Betrachten wir zunächst die Werte C_T^+ und C_T^- der Call-Option zum Verfalltag. In dem Beispiel gilt offenbar $C_T^+ = 130 - 110 = 20$ und $C_T^- = 0$. Wenn man diese Werte auf den Zeitpunkt 0 beziehen möchte, muß man sie allerdings noch *diskontieren*, d.h. mit dem sog. Diskontfaktor $v = 1/(1+i)$ multiplizieren; man erhält also $v \cdot C_T^+ = 20/1{,}05 = 19{,}05$ und $v \cdot C_T^- = 0$. Man kann nun die obige Situation als ein Spiel auffassen, in dem der Käufer der Option gegen den "Markt" spielt. Der Optionspreis entspricht dann dem Einsatz für ein "faires" Spiel. Es gibt hier allerdings (mindestens) *zwei* Möglichkeiten, "Fairness" zu definieren:

<u>1. Variante eines fairen Spiels:</u> Der Käufer sollte im Durchschnitt weder Gewinn noch Verlust erzielen, wenn er ausschließlich mit Optionen handelt; demnach ist der Erwartungswert

$$C_0 = E(v \cdot C_T) = p \cdot v \cdot C_T^+ = 0{,}4 \times 19{,}05 = \mathbf{7{,}62}$$

der "richtige" Optionspreis. Die Betonung bei dieser Betrachtungsweise liegt dabei auf dem Wort *ausschließlich*; tatsächlich läßt sich nämlich leicht zeigen, daß ein geschickter Käufer, der nicht nur mit Optionen, sondern auch mit Aktien (und Krediten) handelt, mit dem obigen Options-Preis *in jedem Fall* einen Gewinn erzielen kann, unabhängig davon, in welche Richtung sich der Aktienkurs entwickelt! Die folgende Tabelle zeigt, wie dies hier zu bewerkstelligen ist:

t = 0		t = T	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,--	-260,--	-160,--
Kauf 5 Call-Optionen	-38,10	+100,--	0,--
Kredit vergeben	-161,90	+170,--	+170,--
Saldo	0,--	+10,--	+10,--

<u>Erläuterung:</u> Bei einem sog. *Leerverkauf* zum Zeitpunkt 0 wird das betreffende Wirtschaftsgut nicht sofort, sondern erst zu dem späteren Zeitpunkt T übergeben; die Bezahlung erfolgt allerdings bereits zum Zeitpunkt 0, zu dem dann gültigen Preis [hier: 100]. Unser hypothetischer Options-Käufer erzielt also zum Zeitpunkt 0 eine Einnahme von 200 für zwei leerverkaufte - noch nicht in seinem Besitz befindliche - Aktien, die er erst zum Zeitpunkt T selbst auf dem Markt erwirbt, um sie dann pflichtgemäß zu übergeben. Je nach Kursentwicklung wird sein Konto also zur Zeit T mit einem Betrag von 260 [steigender Kurs] bzw. 160 [fallender

Kurs] belastet. Da die fünf im Gegenzug erworbenen Call-Optionen aber nur 38,10 kosten, hat er zur Zeit 0 ein Guthaben von 161,90, welches er zu einem Zinssatz von 5% ausleiht und zum Zeitpunkt T einschließlich Zinsen im Gesamtwert von 170 zurückerhält. Zum Zeitpunkt 0 ist sein Konto also mit Wert 0 ausgeglichen.
Die beiden rechten Spalten der Tabelle zeigen die Kontoentwicklung zum Zeitpunkt T. Im Fall einer Kurssteigerung wird unser Käufer sinngemäß das Kaufrecht aus den fünf erworbenen Call-Optionen ausüben; d.h. er erwirbt 5 Aktien zum vereinbarten Ausübungspreis von 110 und verkauft sie sofort an der Börse zum aktuellen Kurs von 130, woraus ein Netto-Gewinn von $5 \times 20 = 100$ resultiert. Im Fall eines sinkenden Kurses sind die Optionen natürlich wertlos.
Offensichtlich kann unser Options-Käufer unabhängig von der tatsächlichen Kursentwicklung also in jedem Fall einen Netto-Gewinn von 10 realisieren! Man spricht in einem solchen Fall auch von einer sog. *Arbitrage*-Möglichkeit, d.h. der Möglichkeit, ohne eigenen finanziellen Aufwand ein sicheres positives Ergebnis zu erzielen.

<u>2. Variante eines fairen Spiels:</u> Der Käufer sollte im Durchschnitt weder Gewinn noch Verlust erzielen, wenn er mit *Optionen, Aktien und Krediten* handelt.
Dazu betrachten wir zunächst eine Situation mit einem höheren Optionspreis als dem oben angegebenen, etwa $C_0 = 12$. Die folgende Tabelle zeigt, daß auch dann eine sichere Arbitrage-Möglichkeit existiert:

t = 0		t = T	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf 2 Aktien	-200,--	+260,--	+160,--
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,--	-100,--	0,--
Kredit aufnehmen	+140,--	-147,--	-147,--
Saldo	0,--	+13,--	+13,--

Um solche Arbitrage-Möglichkeiten auszuschließen, wollen wir nun einen allgemeineren Ansatz betrachten:

t = 0		t = T	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Leerverkauf n Aktien	$+nS_0$	$-nS_T^+$	$-nS_T^-$
Kauf m Call-Optionen	$-mC_0$	$m(S_T^+-X)$	0,--
Kredit vergeben	$-(nS_0-mC_0)$	$r(nS_0-mC_0)$	$r(nS_0-mC_0)$
Saldo	0,--	0,--	0,--

Dabei ist r = 1+i der Zinsfaktor für die betrachtete Periode T. Aus den beiden rechten Spalten ergibt sich nun die Gleichung

$$-nS_T^+ + m(S_T^+ - X) = -nS_T^-,$$

so daß das Verhältnis h=n/m (sog. *hedge ratio*) eindeutig bestimmt ist zu

$$\boxed{h = (S_T^+ - X)/(S_T^+ - S_T^-)}$$

und als Lösung für den Call-Preis zur Zeit 0 folgt

$$\boxed{C_0 = h(S_0 - v \cdot S_T^-).}$$

Im obigen Beispiel ergibt sich demnach h = (130 - 110)/(130 - 80) = 20/50 = **0,4** und C_0 = 0,4 × (100 - 80/1,05) = **9,52**. Eine analoge Rechnung zeigt, daß sich dieselben Werte auch dann ergeben, wenn man - wie in der vorletzten Tabelle - n Aktien *kauft* und m Calls *verkauft*. Die *hedge ratio* gibt dabei gerade das "richtige" Verhältnis von gehandelten Aktien zu Optionen an, hier also ein Verhältnis von 0,4 = 2:5.

Interessanterweise hängt der Call-Preis C_0 nach der letzten Formel gar nicht mehr von der Wahrscheinlichkeit p eines Kursanstiegs ab! Trotzdem kann man diesen Call-Preis immer noch als Erwartungswert interpretieren, wenn man die "richtige" Wahrscheinlichkeit p* für einen Kursanstieg entsprechend bestimmt, d.h. man betrachtet die Gleichung

$$\boxed{C_0 = h(S_0 - v \cdot S_T^-) = p^* \cdot v \cdot C_T^+}$$

mit

$$\boxed{p^* = h(S_0 - v\cdot S_T^-)/(v\cdot C_T^+) = \frac{rS_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}}$$

als Lösung. Einzige Bedingung ist hier, daß $rS_0 \le S_T^+$ gilt - d.h. es ist theoretisch möglich, am Aktienmarkt eine höhere Rendite als auf dem Geldmarkt - mit dem "risikolosen" Zins i - zu erzielen.
Im obigen Beispiel ergibt sich damit p* = (105 - 80)/(130 - 80) = 25/50=**0,5**, d.h. würde die Wahrscheinlichkeit für einen Kursanstieg gerade 0,5 betragen, wäre C_0 nach der obigen allgemeinen Formel genau der Erwartungswert nach "Variante 1".

Diese Betrachtungsweise ist charakteristisch für die gesamte Stochastische Finanzmathematik, d.h. es kommt bei der Bewertung von Derivaten (Optionen) nicht auf die <u>tatsächlichen</u> Wahrscheinlichkeiten p *von Kursveränderungen, sondern allein auf die <u>rechnerisch äquivalenten</u> Wahrscheinlichkeiten* p* *an, unter denen die Optionspreise nach dem Erwartungswert-Prinzip Arbitrage-Möglichkeiten ausschließen.*

Entsprechende Überlegungen lassen sich natürlich auch für Put-Optionen anstellen. Die folgende Tabelle zeigt die analoge Rechnung gleich im allgemeinen Rahmen:

t = 0		t = T	
Aktion	Konto	$S_T^+ \ge X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-nS_0$	$+nS_T^+$	$+nS_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-mP_0$	0,--	$m(X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	nS_0+mP_0	$-r(nS_0+mP_0)$	$-r(nS_0+mP_0)$
Saldo	0,--	0,--	0,--

mit der *hedge ratio* $h^*=n/m=(X - S_T^-)/(S_T^+ - S_T^-) = 1-h$ für Put-Optionen und dem Put-Preis

$$\boxed{P_0 = h^*(v\cdot S_T^+ - S_0).}$$

Im obigen Beispiel erhält man also h* = **0,6** und $P_0 = 0{,}6 \times (130/1{,}05-100)$ = **14,29**.

Für die Put-Call-Parity-Relation zur Zeit 0 ergibt sich hieraus nebenbei noch die Beziehung C_0-P_0=S_0-v·X, die zusammen mit der anfänglichen Put-Call-Parity-Relation auch geschrieben werden kann als

$$\boxed{C_t - P_t = S_t - v^{(1-t/T)} \cdot X, \ \ t \in \{0,T\}.}$$

Diese Formel ist auch in allgemeineren, zeitstetigen Modellen der Optionspreis-Theorie gültig (d.h. im Bereich $0 \leq t \leq T$); allerdings können wir den Nachweis dafür mit den hier vorgestellten Methoden nicht führen.

3. Die Hebel-Wirkung von Optionsgeschäften (Leverage-Effekt)

In diesem Abschnitt wollen wir - bei gleichem Kapitaleinsatz - die Auswirkungen reiner Optionsgeschäfte gegenüber reinen Aktiengeschäften betrachten. Die Zahlen gehandelter Aktien [n] und gehandelter Optionen [m] seien also so gewählt, daß der Kapitalaufwand $K = nS_0 = mC_0$ stets gleich hoch ist.

t = 0		t = T	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf n Aktien	$-nS_0$	$+nS_T^+$	$+ nS_T^-$
Kredit aufnehmen	$+ nS_0$	$-r\ nS_0$	$-r\ nS_0$
Saldo	0,--	$n(S_T^+-rS_0)$	$-n(rS_0-S_T^-)$

reines Aktiengeschäft

t = 0		t = T	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf m Call-Optionen	$-mC_0$	$+m(S_T^+-X)$	0,--
Kredit aufnehmen	$+ mC_0$	$-r\ mC_0$	$-r\ mC_0$
Saldo	0,--	$m(S_T^+-X-rC_0)$	$-r\ mC_0$

reines Optionsgeschäft

Setzt man die oben hergeleitete Optionspreis-Formel $C_0 = h(S_0 - v \cdot S_T^-)$ in die Ergebnisse der unteren Zeile der letzten Tabelle ein, so ergibt sich:

$$-rmC_0 = -rmh(S_0 - v \cdot S_T^-) = -mh(rS_0 - S_T^-) = -(mh/n) \cdot n(rS_0 - S_T^-)$$

$$m(S_T^+ - X - rC_0) = m(S_T^+ - X - h[rS_0 - S_T^-]) = (mh/n) \cdot n(S_T^+ - rS_0),$$

d.h. die Saldi aus reinem Aktiengeschäft und reinem Optionsgeschäft unterscheiden sich genau um den Faktor

$$\rho = mh/n = 1 + S_T^- / (rS_0 - S_T^-) > 1.$$

Dies bedeutet:

- Bei gleichem Kapitaleinsatz sind Gewinne bzw. Verluste aus einem reinen Optionsgeschäft gegenüber einem reinen Aktiengeschäft um dem Faktor $\rho > 1$ größer.
- Bei gleichem Kapitaleinsatz werden im Fall (positiver) Gewinne bei einem reinen Optionsgeschäft mehr Aktien bewegt als bei einem reinen Aktiengeschäft, und zwar genau $m/n = \rho/h$ mal soviele (Hebelwirkung oder *Leverage*-Effekt). [Man beachte, daß zur Realisierung des Gewinns aus dem Optionsgeschäft am Verfalltag m Aktien zum günstigeren Ausübungspreis X erworben und gleichzeitig zum höheren Börsenkurs S_T^+ wieder verkauft werden müssen.]

Im Anfangsbeispiel gilt etwa

$$\rho = 1 + 80/(105 - 80) = 1 + 80/25 = \mathbf{4{,}2}$$

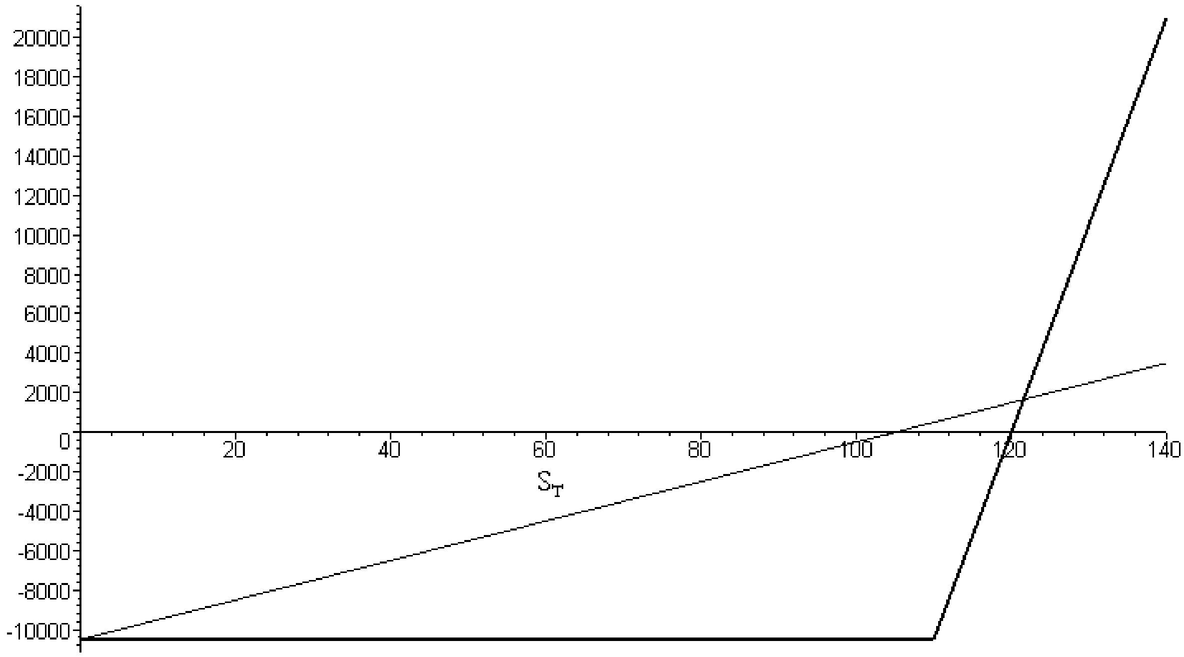
$$\rho/h = 4{,}2 \times (130 - 80)/(130 - 110) = 210/20 = \mathbf{10{,}5}.$$

Legt man im Modell wieder die äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p* statt p zugrunde, so ergibt sich außerdem noch für den Gewinn bzw. Verlust G bei Handel mit n Aktien bzw. m Call-Optionen:

$$E^*(G) = n[p^*(S_T^+ - rS_0) - (1 - p^*)(rS_0 - S_T^-)] = n[p^*(S_T^+ - S_T^-) + S_T^- - rS_0] = 0,$$

was noch einmal die Motivation für die Variante 2 des fairen Spiels unterstreicht.

Die folgende Graphik zeigt die Hebelwirkung von Optionsgeschäften noch einmal aus einer anderen Sichtweise.

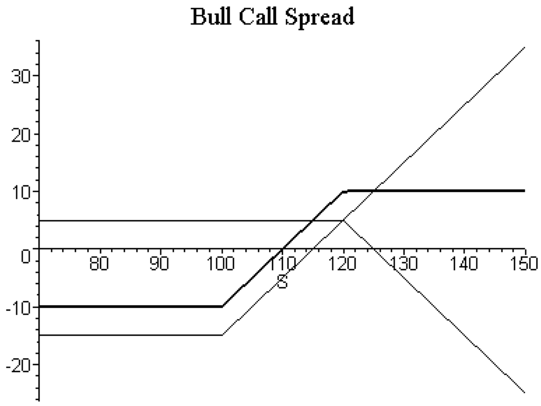


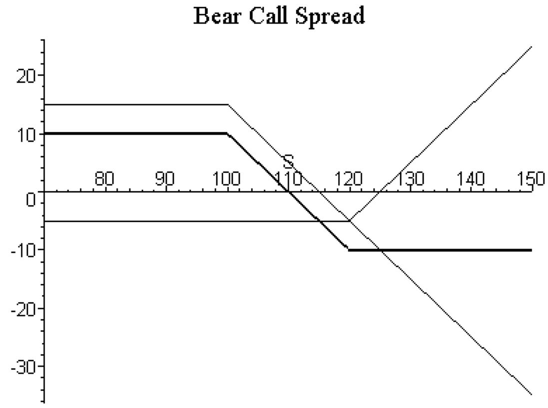
Gewinn / Verlust aus Optionen (dicke Linie) und aus Aktien (dünne Linie) als Funktion des Kurswerts S_T; C_0 = 9,52, X = 110, K = 10000, i = 5%

4. Kombinationen von Optionsgeschäften

In diesem Abschnitt wollen wir den "spekulativen" Aspekt von Optionsgeschäften ein wenig weiter vertiefen, indem wir die Auswirkungen bestimmter Kombinationen, die in der Praxis häufig anzutreffen sind, untersuchen, wie z.B. gleichzeitiger Kauf und Verkauf gewisser Optionen. Ausgangspunkt unserer Rechnungen ist dabei wieder das obige Beispiel von Eberlein, d.h. bei der Berechnung der Optionspreise gehen wir von der Annahme aus, daß die zukünftigen Kurse nur zwei Werte annehmen können; wir untersuchen allerdings die Auswirkungen der getätigten Geschäfte für eine wesentlich größere Bandbreite möglicher zukünftiger Kurse.
Ein erster wichtiger Typ von Kombinationsgeschäften ist der sog. "Spread"; darunter versteht man den gleichzeitigen Kauf und Verkauf je einer Option desselben Typs zu unterschiedlichen Ausübungspreisen. Die Auswirkungen dieser Handels-Strategie bestehen im wesentlichen in einer Reduzierung des Verlustrisikos bei gleichem Kapitaleinsatz, allerdings werden die Gewinn-Chancen damit ebenfalls geringer. Die folgenden beiden Graphiken zeigen die Gewinne aus einem sog. *Bull-Call-Spread* und einem sog. *Bear-Call-Spread* als Funktion des Kurswerts zur Zeit T; im ersten Fall ist der Ausübungspreis X_1 der gekauften Option niedriger als der

Ausübungspreis X_2 der verkauften Option, im zweiten Fall ist es gerade umgekehrt. Mit C_{01} und C_{02} seien dabei die zugehörigen Call-Preise bezeichnet, die sich aus dem oben hergeleiten Ansatz [Arbitragefreiheit] ergeben.

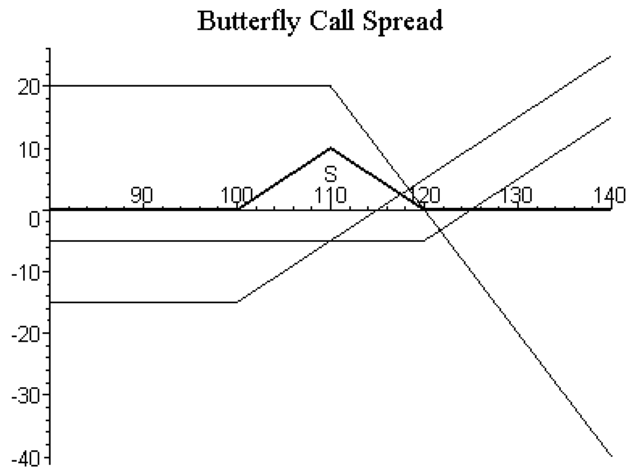




X_1=100 X_2=120; C_{01}=14,28 C_{02}=4,76 X_1=120 X_2=100; C_{01}=4,76 C_{02}=14,28

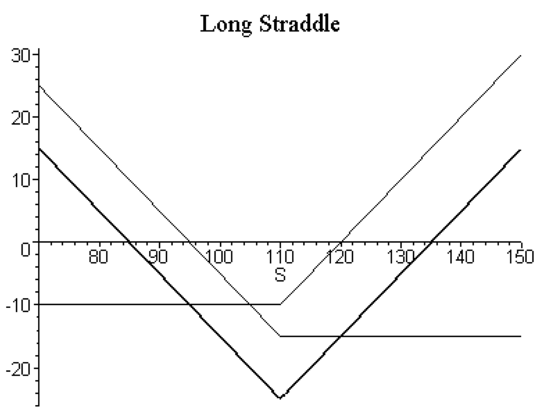
In beiden Fällen betragen die absoluten Kosten $|C_{01}-C_{02}|$=9,52, d.h. die hier betrachteten Kombinationsgeschäfte sind genau so teuer wie ein Optionsgeschäft mit nur *einer* gekauften Call-Option zum Ausübungspreis von X=110; allerdings sind Verlust und Gewinn in beiden Fällen begrenzt durch den Wert 10. Das Risiko bei dieser Art von Optionsgeschäft ist also relativ gering, allerdings sind hier auch die Gewinnmöglichkeiten entsprechend niedrig. Die Entscheidung für einen Bull- oder Bear-Call-Spread hängt dabei entscheidend von der Erwartung an die zukünftige Kursentwicklung ab: geht man eher von steigenden Kursen aus, wird man sich sinnvollerweise für einen Bull-Call-Spread entscheiden, im umgekehrten Fall für einen Bear-Call-Spread. [Die Namensgebung dürfte übrigens abgeleitet sein aus der typischen Kopfhaltung der bezeichneten Tiergattung: ein Stier trägt den Kopf hoch, ein Bär dagegen tief.] Ähnliche Darstellungen ergeben sich, wenn man mit Put-Optionen arbeitet.

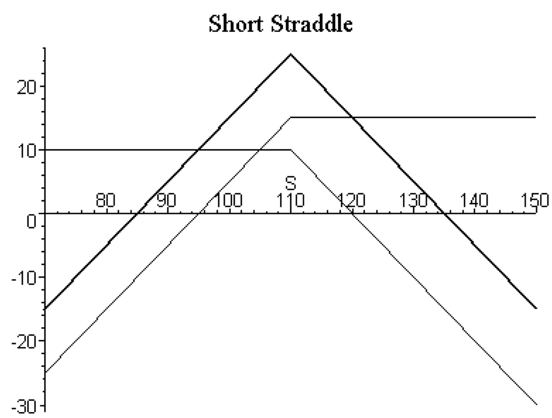
Eine besonders geschickte Kombination von Optionsgeschäften besteht in dem *Butterfly-Call-Spread*, bei dem zwei Call-Optionen zu unterschiedlichen Ausübungspreisen $X_1<X_2$ gekauft und zwei weitere Call-Optionen zu einem dazwischenliegenden Ausübungspreis X_3 mit $X_1<X_3<X_2$ verkauft werden. Theoretisch ist es damit möglich, einen sicheren [nicht-negativen] Gewinn zu erzielen! Die folgende Graphik zeigt wieder den Verlauf des Gewinns in Abhängigkeit vom Kurswert.



$X_1=100$ $X_2=120$ $X_3=110$ $C_{01}=14{,}28$ $C_{02}=4{,}76$ $C_{03}=9{,}52$

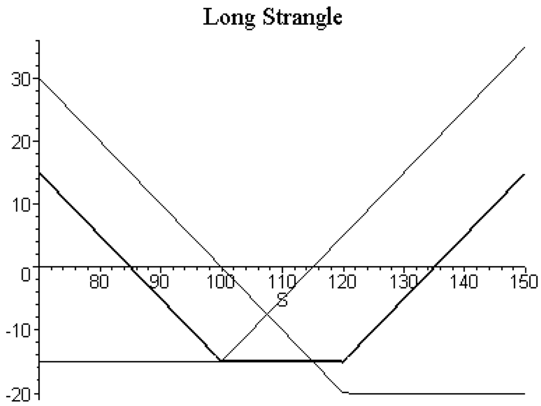
Wie man sieht, erzielt der Butterfly-Call-Spread einen sicheren positiven Gewinn für Kurse im Bereich von $X_1=100$ bis $X_2=120$, ohne einen Verlust für alle übrigen Kurswerte zu realisieren! Die ist übrigens *kein* Widerspruch zur oben geforderten Arbitragefreiheit, weil sich diese nur auf die möglichen zukünftigen Kurse von 80 bzw. 130 bezieht, und man aus der Graphik bzw. der zugehörigen Rechnung deutlich erkennt, daß für diese Kurse tatsächlich auch kein Gewinn realisierbar ist. [In der "wirklichen" Praxis scheitert dieses verlockende Geschäft allerdings an der Tatsache, daß erstens i.a. Optionspreise nicht exakt nach unserer Theorie berechnet werden, und zweitens für solche Geschäfte üblicherweise Transaktionskosten in Form von Gebühren oder Provisionen anfallen.]
Ein ähnlicher Effekt läßt sich durch den gleichzeitigen Kauf bzw. Verkauf einer Call- und einer Put-Option zum selben Ausübungspreis X erzielen (sog. *Straddle*). Im ersten Fall (*Long Straddle*) erzielt man einen positiven Gewinn, wenn der Kurswert zur Zeit T stärker vom Ausübungspreis abweicht, im anderen Fall (*Short Straddle*), wenn der Kurswert nahe beim Ausübungspreis liegt. Auch hier bestimmt also die Erwartung an die zukünftigen Kursschwankungen das Anlegerverhalten.

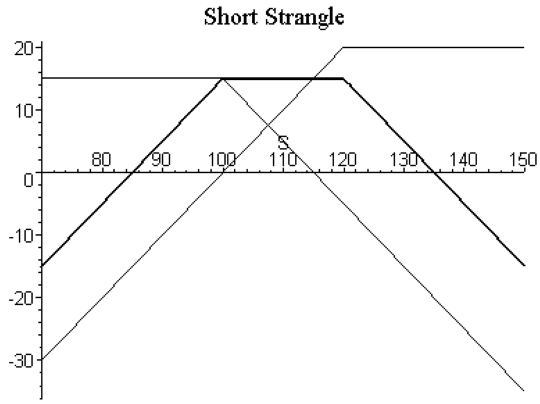




$X=110$ $C_0=9{,}52$ $P_0=14{,}28$

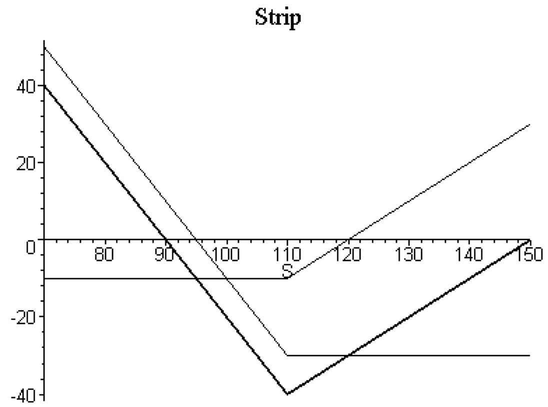
Im betrachteten Beispiel liegt die Verlust- bzw. Gewinnzone im Bereich [85,135], mit maximalem Verlust / Gewinn von $C_0+P_0=23{,}80$ für einen Kurs von $S_T=X=110$.
Eine "Verflachung" der Spitzen erreicht man zusätzlich noch dadurch, daß die Call- und Put-Option zu *unterschiedlichen* Ausübungspreisen ge- bzw. verkauft werden (sog. *Strangle*). Im folgenden Beispiel beträgt der Ausübungspreis für die Call-Option $X_1=100$ und für die Put-Option $X_2=120$. Man beachte, daß die Verlust- / Gewinnzone hier unverändert ist, wogegen der maximale Verlust / Gewinn nur noch 15,00 beträgt, allerdings mit höheren absoluten Preisen von $C_{01}+P_{02}=33{,}33$.

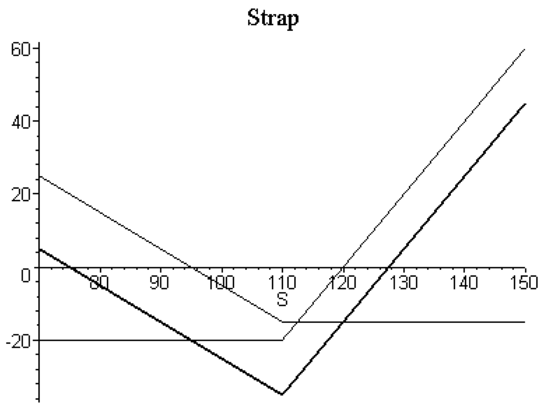




$X_1=100$ $X_2=120$ $C_{01}=14{,}28$ $P_{02}=19{,}04$

Gelegentlich sind auch unsymmetrische Auszahlungen von Interesse. Dies kann man durch unterschiedliche Anzahlen ge- bzw. verkaufter Optionen realisieren (sog. *Strip* bzw. *Strap*). Die folgenden Diagramme zeigen den Gewinnverlauf für die Long-Position im Fall von einer Call- und zwei Put-Optionen (Strip) bzw. einer Put- und zwei Call-Optionen (Strap).





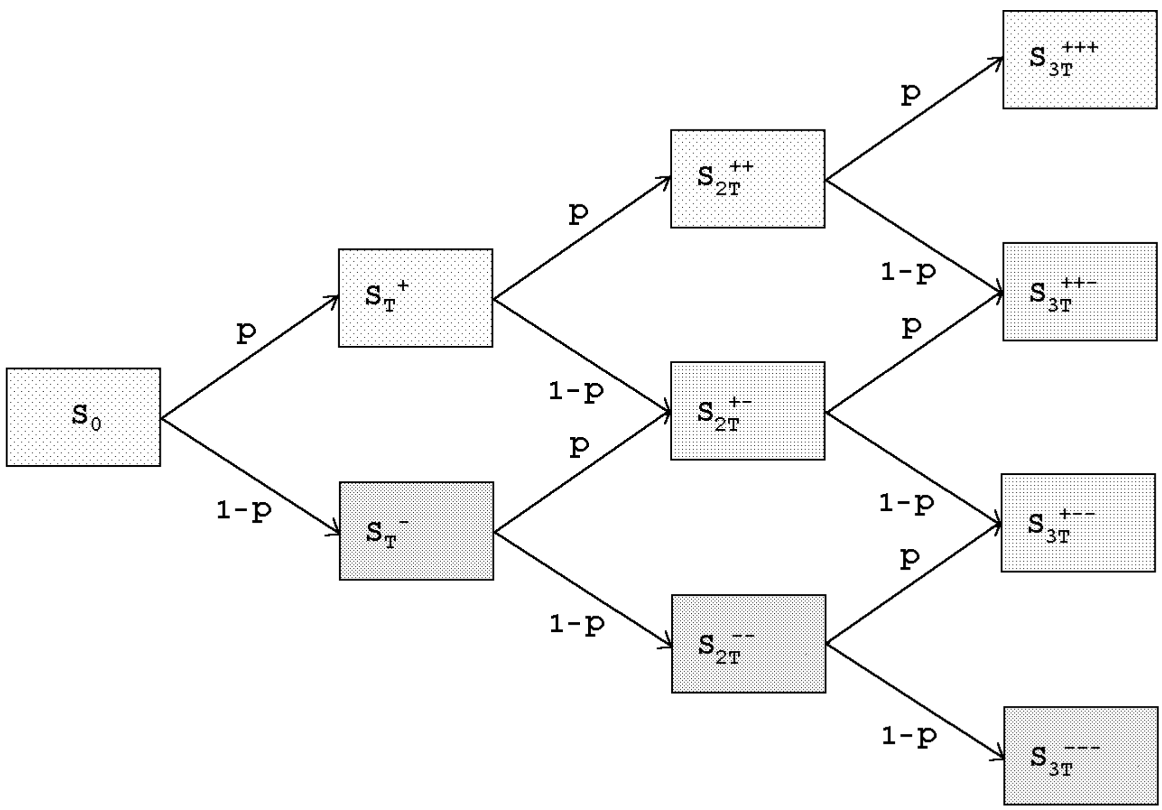
$X=110$ $C_0=9{,}52$ $P_0=14{,}28$

5. Das Binomialmodell von Cox - Ross - Rubinstein

In diesem Abschnitt soll kurz auf die schon eingangs erwähnte, grundlegende Idee der Binomialbäume eingegangen werden, mit denen das obige Grundmodell leicht zu einem entsprechenden Mehrperioden-Modell erweitert werden kann; d.h. wir betrachten jetzt Börsenkurse S_0, S_T, ... , S_{nT} zu den diskreten, äquidistanten Zeitpunkten 0, T, ... , nT.
Zur Vereinfachung denken wir uns die jeweiligen Kursveränderungen von S_{iT} nach $S_{(i+1)T}$ in *prozentualer* Form, d.h. wir betrachten konstante Kursänderungsraten

$$k^+ = (S_T^+ / S_0) - 1 > 0 \quad \text{und} \quad k^- = (S_T^- / S_0) - 1 < 0,$$

wobei wieder Aufwärtsbewegungen des Kurses durch "+" (mit Wahrscheinlichkeit p) und Abwärtsbewegungen durch "-" (mit Wahrscheinlichkeit 1-p) gekennzeichnet seien. Beispielsweise entsteht der Kurswert $S_{2T}^{+-} = S_{2T}^{-+}$ durch eine Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung des Kurses, der Kurswert $S_{3T}^{++-} = S_{3T}^{+-+} = S_{3T}^{-++}$ durch zwei Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung usw. Eine Aufwärtsbewegung entspricht dabei der Multiplikation des aktuellen Kurswertes mit dem Faktor $(1 + k^+) > 1$, eine Abwärtsbewegung einer Multiplikation mit dem Faktor $(1 + k^-) < 1$. Die folgende Graphik verdeutlicht das Modell für den Fall n = 3.



Nimmt man an, daß die Auf- und Abwärtsbewegungen der Kurse stochastisch unabhängig voneinander sind und bezeichnet N die Anzahl aller Aufwärtsbewegungen innerhalb der n Perioden (d.h. n - N ist die Anzahl aller Abwärtsbewegungen), so ist N binomialverteilt, und es ergibt sich sofort

$$\boxed{S_{nT} = (1+k^+)^N (1+k^-)^{n-N} S_0}$$

mit

$$\boxed{P(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.}$$

Die äquivalente Wahrscheinlichkeit p*, unter der das (stufenweise) Erwartungswertprinzip Arbitrage-Möglichkeiten ausschließt, nimmt hier folgende einfache Form an:

$$\boxed{p^* = \frac{rS_0 - (1+k^-)S_0}{(1+k^+)S_0 - (1+k^-)S_0} = \frac{i-k^-}{k^+-k^-}}$$

Wie im Fall des Ein-Perioden-Modells sind hier die möglichen Werte einer Call-Option zur Zeit nT bekannt; es gilt analog

$$\boxed{C_{nT} = (S_{nT} - X)^+.}$$

Es liegt nahe (und kann auch theoretisch beweisen werden), daß der "richtige" Optionspreis zur Zeit 0 wieder nach Diskontierung durch das Erwartungswertprinzip - mit der äquivalenten Wahrscheinlichkeit p* - gegeben ist:

$$\begin{aligned} C_0 &= E^*(v^n C_{nT}) = v^n E^*(S_{nT} - X)^+ \\ &= v^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j} [S_0 (1+k^+)^j (1+k^-)^{n-j} - X]^+ \end{aligned}$$

Eine rechentechnische Vereinfachung dieses Ausdrucks erhält man aufgrund der Tatsache, daß hier nicht alle Summanden positiv sind; es brauchen lediglich diejenigen Summanden berücksichtigt werden, für die

$$S_0(1+k^+)^j(1+k^-)^{n-j} > X$$

ist. Damit ergibt sich abschließend:

$$\boxed{C_0 = S_0 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} q^{*j}(1-q^*)^{n-j} - v^n X \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}}$$

mit dem unteren Summationsindex

$$a = \left\lceil \frac{\ln \dfrac{X}{S_0(1+k^-)^n}}{\ln \dfrac{1+k^+}{1+k^-}} \right\rceil ,$$

wobei $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ gesetzt sei und die Wahrscheinlichkeiten q^* und p^* (wie oben) gegeben sind durch

$$\boxed{q^* = (1+k^+) \cdot v \cdot p^*, \quad p^* = \frac{rS_0 - (1+k^-)S_0}{(1+k^+)S_0 - (1+k^-)S_0} = \frac{i-k^-}{k^+-k^-} \ .}$$

6. Die Formel von Black und Scholes

Für große Werte von n wird die obige Bewertungsformel von Cox, Ross und Rubinstein schnell unübersichtlich. Es liegt daher nahe, in diesem Fall die Normal-Approximation für die Binomialverteilung zu verwenden, wie sie in praktisch allen Lehrbüchern zur Schulmathematik behandelt wird (vgl. z.B. Althoff (1985), Kapitel 6 oder Barth und Haller (1996), Kapitel 15). Bezeichnet man wie üblich mit Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, also

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \quad x \in \mathbb{R}$$

und verwendet man die Symmetrie-bedingte Beziehung 1-$\Phi(x) = \Phi(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, so läßt sich die Cox-Ross-Rubinstein-Formel mit den obigen Bezeichnungen approximativ auch schreiben als

$$C_0 \approx S_0 \Phi\left(\frac{q^* - a}{\sqrt{nq^*(1-q^*)}} \right) - v^n X \Phi\left(\frac{p^* - a}{\sqrt{np^*(1-p^*)}} \right).$$

Läßt man hier gleichzeitig mit n auch die prozentualen Kursänderungsraten k_n^+ und k_n^- sowie den Zins i_n variieren, indem man etwa bei fester Gesamtlaufzeit T und n Teilperioden der Länge T/n

$$k_n^+ = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \;\; k_n^- = -\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \;\; \text{und} \;\; i_n = \frac{T}{n}\ln(1+i)$$

mit $\sigma > 0$ setzt - dann gilt

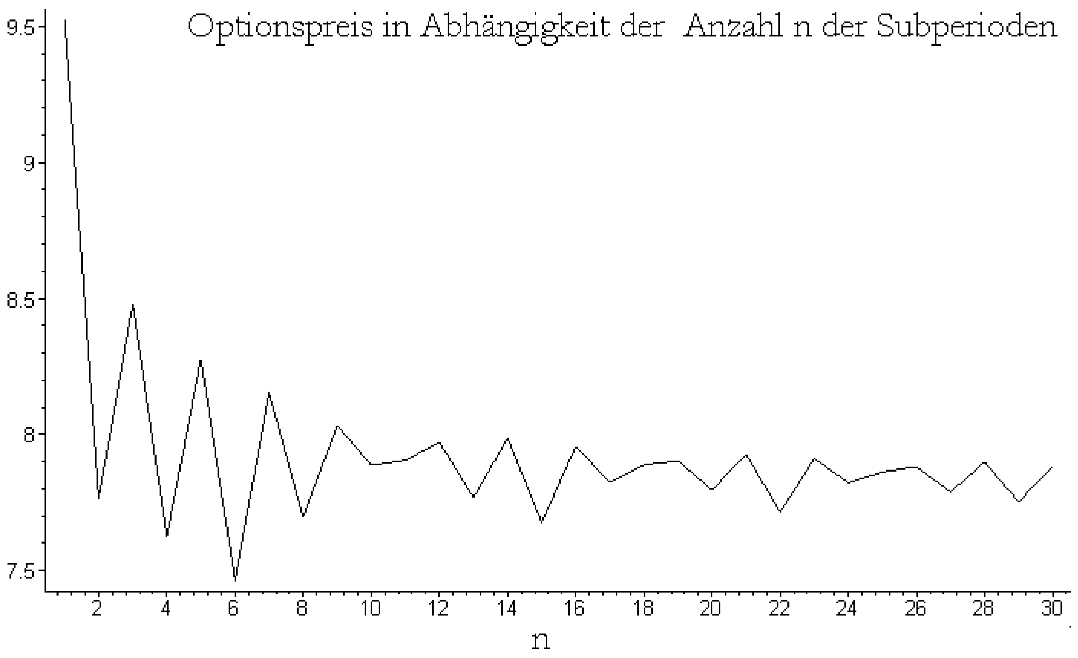
$$(1+i_n)^n \approx \exp\big(T \cdot \ln(1+i)\big) = (1+i)^T \text{ mit } \lim_{n\to\infty}(1+i_n)^n = (1+i)^T,$$

d.h. das Kapitalwachstum mit Zinseszinsen über die Periode T ist in beiden Fällen asymptotisch gleich - erhält man nach einigen Umformungen die ursprüngliche *Formel von Black und Scholes* (für Details sei auf Uhlir und Steiner (1994), Anhang 4.1 oder Bingham und Kiesel (1998), Abschnitt 4.6.2 verwiesen):

$$C_0^{as} = S_0 \Phi\left(\frac{\ln(S_0/X) + (\ln(1+i) + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - v^T X \Phi\left(\frac{\ln(S_0/X) + (\ln(1+i) - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right).$$

Die Größe σ heißt im finanzmathematischen Sprachgebrauch auch *Volatilität*; sie beschreibt die Variabilität der Kursänderungen in zeitstetigen Modellen, die man als Grenzfall aus dem Cox – Ross – Rubinstein – Modell erhält (sog. *Geometrische Brown'sche Bewegung*).

Die Konvergenz der Optionspreise aus dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell gegen den Black-Scholes-Preis ist i.a. nicht monoton; die folgende Graphik zeigt dies am eingangs betrachteten Beispiel:



Der Black-Scholes-Preis der Call-Option beträgt hier C_0^{as} = **7,77** bei einem Ein-Perioden-Preis C_0 = **9,52** (siehe oben).

7. Schlußbemerkung

Die moderne Finanzmathematik hat sich zu einem spannenden Teilgebiet der Stochastik und einem unverzichtbaren Instrument der heutigen Wertpapier- und Finanzmärkte entwickelt, deren elementare Grundlagen nicht über den Erwartungswertbegriff für diskrete Zufallsvariablen und etwas [lineare] Algebra hinausgehen. Diese Grundlagen können deshalb im schulischen Stochastik-Unterricht leicht behandelt werden, zumindest bis zum Cox-Ross-Rubinstein-Modell. Selbst eine in jedem Fall einfach zu realisierende Beschränkung auf den Ein-Perioden-Fall birgt bereits alle wesentlichen Erkenntnisse in sich, die sogar in „spielerischer“ Form auf spannende Weise vermittelt werden können (vgl. etwa das im Rahmen eines TEMPUS-Projektes entwickelte MAPLE-Worksheet zur Optionspreistheorie im Anhang). Der Übergang zur Black-Scholes-Formel ist dagegen schwieriger und sollte im Detail - wenn überhaupt - nur in einem Leistungskurs zur Stochastik behandelt werden.

Die größte didaktische Herausforderung liegt dabei wohl in einer alternativen Sicht des *Erwartungswertbegriffs*: während dieser in der klassischen Behandlung der Stochastik etwa über das Gesetz der großen Zahlen „unmittelbar“ erfahrbar ist, wird hier der Erwartungswert als mittelbares Instrument der Modellierung eines anderen - wirtschaftswissenschaftlich motivierten - Begriffs, nämlich dem der

Arbitragefreiheit des Marktes, eingesetzt. Gerade hierin liegt aber auch die Chance, die in der Schule gelehrte Stochastik von dem ihr immanent anhaftenden und manchmal als unseriös empfundenen Glücksspielcharakter zu befreien und Schülerinnen und Schülern die so oft nachgefragte „wirkliche“ Relevanz von Stochastik - und damit auch Mathematik insgesamt - aufzuzeigen.

8. Im Text zitierte Literatur

Althoff, H. (1985): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Barth, F. und Haller, R. (1996): *Stochastik Leistungskurs.* 5., verbesserte Aufl., Ehrenwirth-Verlag, München.

Bingham, N.H. und Kiesel, Rüdiger (1998): *Risk-Neutral Valuation.* Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Springer-Verlag, London.

Eberlein, E. (1998): *Grundideen moderner Finanzmathematik*. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 3, 10 - 20.

Uhlir, H. und Steiner, P. (1994): *Wertpapieranalyse.* Physica-Verlag, Heidelberg.

9. Weiterführende Literatur

Baxter, M. und Rennie, A. (1998): *Financial Calculus.* An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge University Press, Cambridge.

Björk, T. (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, Oxford.

Briyus, E., Bellalah, M., Mai, H.M. und de Varenne, F. (1998): *Options, Futures and Exotic Derivatives.* Theory, Application and Practice. John Wiley & Sons, Chichester.

Musiela, M. und Rutkowski, M. (1997): *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer-Verlag, Berlin.

Irle, A. (1998): *Finanzmathematik*. Die Bewertung von Derivaten. Teubner-Verlag, Stuttgart.

Korn, R. und Korn, E. (1999): *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung.* Moderne Methoden der Finanzmathematik. Vieweg-Verlag, Braunschweig.

Kwok, Y.K. (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer-Verlag, Singapur.

Lamberton, D. und Lapeyre, B. (1997): *Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman & Hall, London.

Pliska, S.R. (1997): *Introduction to Mathematical Finance.* Discrete Time Models. Blackwell Publishers, Massachusetts.

Wilmott, P. (1998): *Derivatives.* The Theory and Practice of Financial Engineering. John Wiley & Sons, Chichester.

10. Anhang

Derivatives

This MAPLE-worksheet enables the calculation of arbitrage-free prices for European call and put options depending on the initial stock price S, the exercise price X, the riskless interest rate i and the expiration time T for the one-period two-state model (Cox-Ross-Rubinstein model) with possible final stock prices S_plus and S_minus. Examples for combinations of trading strategies (bull / bear / butterfly spreads etc.) and their dependence on stock prices are also given.

```
> restart:
> with(plots):
```

I. Option pricing

input of initial parameters:

```
>S_0:=100;X:=110;i:=0.05;T:=1;S_plus:=130;S_minus:=80;r:=(1+i)^T;
```

hedge ratio:

```
>h:=X->(S_plus-X)/(S_plus-S_minus):
>h=h(X);
```

option prices:

```
> C_0:=X->h(X)*(S_0-S_minus/r):P_0:=X->(1-h(X))*(S_plus/r-S_0):
> C=C_0(X);P=P_0(X);
> K:=10000;M:=X->K/C_0(X):M=M(X);N:=K/S_0;
> G_Call:=(S,x,c,m)->m*(max(S-x,0)-c*r);
> G_Put:=(S,x,c,m)->m*(max(x-S,0)-c*r);
> G_Stock:=(S,n)->n*(S-S_0*r);
> plot([G_Call(S,X,C_0(X),M(X)),G_Stock(S,N)],S=0..140,title=cat(`Gains and losses from option (red) and stock trading (blue) as function of stock price S;X=`,X,`,K=`,K), titlefont= [TIMES, ROMAN,14], color=[red,blue],thickness=[2,1]);
```

II. Trading strategies: combinations of options

```
> plot([G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1), -G_Call(S, X+10, C_0(X+10),1), G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1)-G_Call(S, X+10, C_0(X+10),1)], S=70..150,title=`Bull Call Spread`, color=[green,blue,red], thickness= [1,1,2], titlefont=[TIMES,ROMAN,14]);
> plot([-G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1), G_Call(S, X+10, C_0(X+10),1), -G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1) + G_Call(S, X+10, C_0(X+10),1)], S=70..150, title=`Bear Call Spread`, color=[green,blue,red], thickness=[1,1,2], titlefont=[TIMES,ROMAN,14]);
> plot([G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1), G_Call(S, X+10, C_0(X+10),1), -G_Call(S, X, C_0(X),2), G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1) + G_Call(S, X+10, C_0(X+10),1)-G_Call(S, X, C_0(X),2)], S=80..140, title = `Butterfly Call Spread`, titlefont = [TIMES,ROMAN,14], color = [brown,green,blue,red], thickness = [1,1,1,2]);
>plot([G_Call(S,X,C_0(X),1), G_Put(S,X,P_0(X),1), G_Call(S,X,C_0(X),1) + G_Put(S, X, P_0(X),1)], S=70..150,title=`Long Straddle`, titlefont=[TIMES,ROMAN,14], color=[green,blue,red], thickness =[1,1,2]);
> plot([-G_Call(S,X,C_0(X),1), -G_Put(S,X,P_0(X),1), -G_Call(S,X,C_0(X),1)-G_Put(S,X,P_0(X),1)], S = 70..150, title = `Short Straddle`, titlefont = [TIMES,ROMAN,14], color = [green,blue,red], thickness=[1,1,2]);
```

```
> plot([G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1), G_Put(S, X+10, P_0(X+10),1), G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1) + G_Put(S, X+10, P_0(X+10),1)], S = 70..150, title = `Long Strangle`, titlefont = [TIMES,ROMAN,14], color=[green,blue,red], thickness=[1,1,2]);
> plot([-G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1), -G_Put(S ,X+10 ,P_0(X+10),1), -G_Call(S, X-10, C_0(X-10),1) - G_Put(S, X+10, P_0(X+10),1)], S = 70..150, title = `Short Strangle`, titlefont=[TIMES,ROMAN,14], color=[green,blue,red], thickness=[1,1,2]);
> plot([G_Call(S,X,C_0(X),1), G_Put(S,X,P_0(X),2), G_Call(S,X,C_0(X),1) + G_Put(S,X,P_0(X),2)], S=70..150,title=`Strip`,color=[green,blue,red],thickness=[1,1,2],titlefont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

(entwickelt im Rahmen des TEMPUS-Projekts JEP-11561-96 mit der Karls-Universität Prag (1997 – 1999) unter dem Titel *Teaching Finance and Insurance Economics to Mathematics Students*)

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Fachbereich Mathematik
Carl von Ossietzky Universität
D-26111 Oldenburg