Beispiel
zur Zeilenstufen- , Hermite- und Smithform
Vorlesung vom 11. Juni 2003

```
> restart:
with(linalg):
```

Definition der Elementarmatrizen als Prozeduren:

```
> P:=proc(n,i,j)   local k;  swaprow(diag(seq(1,k=1..n)),i,j);  end:
> S:=proc(n,i,l)   local k;   evalm(mulrow(diag(seq(1,k=1..n)),i,l));  end:
> Q:=proc(n,i,j,l)   local k;   evalm(addrow(diag(seq(1,k=1..n)),i,j,l));  end:
```

Erläuterung: `evalm(M)` wertet den Ausdruck `M` als Matrix aus, falls dies möglich ist.
Die Matrizenmultiplikation wird dabei mit `&*` angegeben.

```
> A:=matrix(4,5,[4,2,3,4,5,6,3,4,5,6,-2,4,5,4,6,12,5,4,3,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 12 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ich gehe nach dem in der Vorlesung vom 11. Juni angegebenen Algorithmus vor mit dem Zusatz dass bei der Suche nach der Zeilennummer k stets ein minimales k genommen wird.

```
> A1:=evalm(P(4,1,2)&*Q(4,1,2,-1)&*A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 12 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=evalm(Q(4,1,4,-6)&*Q(4,1,3,1)&*Q(4,1,2,-2)&*A1);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> A3:=evalm(P(4,2,3)&*A2);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> A4:=evalm(P(4,2,4)&*A3);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> A5:=evalm(Q(4,2,4,5)&*A4);
```

$$A5 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -10 & -23 \end{bmatrix}$$

```
> A6:=evalm(Q(4,3,4,4)&*A5);
```

$$A6 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

Die letzte Matrix ist offensichtlich in <u>Zeilenstufenform</u>.

Nun reduzieren wir die Matrix `A6,` um die dann eindeutige Hermiteform von A zu erhalten:

```
> A7:=evalm(Q(4,2,1,-1)&*S(4,2,-1)&*A6);
```

$$A7 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

```
> A8:=evalm(Q(4,3,2,-2)&*Q(4,3,1,1)&*A7);
```

$$A8 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

```
> A9:=evalm(Q(4,4,3,-1)&*S(4,4,-1)&*A8);
```

$$A9 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Die letzte Matrix ist die <u>Hermiteform von A</u> unter der Voraussetzung: alle von Eckeinträge (hier: Diagonaleinträge) sind positiv.

Wenn man die Hermiteform schon hat, ist der Weg zur Smithform in diesem Beispiel nicht mehr weit, allerdings wird man die Smithform direkt i.A. anders berechnen.

```
> A10:=evalm(A9&*Q(5,5,1,1)&*Q(5,4,2,1)&*Q(5,5,3,8)&*Q(5,5,4,-5));
```

$$A10 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A11:=evalm(A10&*P(5,5,4));
```

$$A11 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A12:=evalm(A11&*Q(5,5,4,-2));
```

$$A12 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A13:=evalm(P(4,1,4)&*A12&*P(5,4,1));
```

$$A13 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dies ist die <u>Smithform von A</u> unter der Voraussetzung: alle von 0 verschiedenen Einträge sind positiv.