Beispiel zur Vorlesung am 30. Juni 2003

Seien $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **und** $B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **Matrizen aus** $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$**.**

Sind A**,** B **ähnlich ? Wenn ja, berechne eine invertierbare Matrix** T **derart, dass gilt:** $TA = BT$

Allgemeine Methode:
Berechne die Smithformen der beiden charakteristischen Matrizen $(xE - A)$, $(xE - B)$ und vergleiche die Ergebnisse. Nach Satz 10.5(a) sind die beiden gegebenen Matrizen genau dann ähnlich, wenn die Smithformen ihrer charakteristischen Matrizen bezüglich eines festen Vertretersystems $\mathcal{V}$ für die Äquivalenz in $\mathbb{Z}_2[x]$ übereinstimmen.

Im vorliegenden Beispiel ergibt sich in beiden Fällen die gleiche Smithform, nämlich

$$P'(xE - A)Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+1 \end{bmatrix} = P''(xE - B)Q''$$

mit

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & x^2+x & x+1 \end{bmatrix}, \; Q' = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2+x+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{bmatrix}$$

und

$$P'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2+1 & x & x+1 \end{bmatrix}, Q'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & x+1 & x^3+x^2+x \\ 0 & 1 & x^2+1 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man

$$P := (P'')^{-1}P' = \begin{bmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & x^3+1 & x^2+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$Q := Q''(Q')^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & x+x^3 & 1 \\ 0 & x^2+x & 1 \end{bmatrix}$$

Auf Grund von Satz 10.5(b) kann nun einfach $T = {}^\bullet T(B)\big(= Q^\bullet(A)\big)$ gesetzt werden. Auch die Invertierbarkeit von T ist nach Satz 10.5(b) gesichert und kann zur Probe überprüft werden. Im Beispiel ist $T^{-1} = T$ mit

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zur Probe kann die Gleichung $TA = BT$ überprüft werden.

Beachten Sie, dass die Matrizen P', Q', P'', Q'' und damit auch P und Q stark vom gewählten Rechenverfahren abhängen. Auch T ist im Allgemeinen nicht eindeutig.