Lineare Algebra 2 **23. Juni 2003**
SoSe 2003
Schmale

Beispiele möglicher Klausuraufgaben
(zum Stoff bis 18. Juni)

(1) Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden Γ, Γ' in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit

$$\Gamma = u + < v >_{\mathbb{R}}, \Gamma' = u' + < v' >_{\mathbb{R}}$$

und $u = {}^{\mathsf{t}}(1,1,1)$, $u' = {}^{\mathsf{t}}(-1,1,-1)$, $v = {}^{\mathsf{t}}(2,1,2)$, $v' = {}^{\mathsf{t}}(1,2,1)$.

(2) Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion b_A von b auf das Bild von L_A, bzw. auf den Spaltenraum von A.

(b) Bestimmen Sie den kürzesten Vektor v aus $b_A + \mathsf{Lös}\,(A, 0)$.

(c) Begründen Sie, warum jetzt v die kürzeste Lösung der Aufgabe

$$Ax - b = Min!$$

ist.

(3) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung für die Matrix (Spalte) ${}^{\mathsf{t}}(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(4) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ eine reelle Matrix.

(a) Berechnen Sie $\parallel A \parallel_2$.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix P derart, dass gilt: ${}^{\mathsf{t}}P\,{}^{\mathsf{t}}A\; A\,P$ ist eine Diagonalmatrix.

(5) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$ mit $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[x]_{2,x^2+x+1} = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$ und wobei $\alpha := x$ gesetzt wurde.

(a) Bestätigen Sie: $\chi_A = t(t+\alpha)(t+\alpha+1)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathsf{Eig}\,(A, \alpha)$.

(6) Sei $q = (-1)^n \chi_A$, wobei χ_A das charakteristische Polynom von $A \in K^{n\times n}$ ist und K ein Körper. Sei weiter p das Minimalpolynom von A (mit höchstem Koeffizienten 1). Wieso ist p ein Teiler von q ?

(7) Sei R ein kommutativer Ring und $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Zeigen Sie:

$$R[A] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\} .$$

(8) **(a)** Sind die beiden Matrizen $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$ äquivalent in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$?

(b) Gibt es eine Matrix C derart, dass mit A, B aus (a) gilt:

$$AC = B$$

?