Lineare Algebra 2 **30. Juni 2003**
SoSe 2003
Schmale

Weitere Beispiele möglicher Klausuraufgaben

(9) Wie entscheiden Sie, ob eine vorgegebene symmetrische Matrix positiv definit ist ?

(10) Zeigen Sie: Das Produkt zweier (reeller) 2×2- Spiegelungsmatrizen ist eine Drehungsmatrix.

(11) Berechnen Sie die Smithform von $(xE - A)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Hilfe der Determinantenteiler von $(xE - A)$ und unter Benutzung von Satz 9.3(b).

(12) Was sind die wesentlichen Argumente, die zur Eindeutigkeit der Smithform führen ?

(13) Löse, falls möglich, über $\mathbb{Z}$ (d.h. insbesondere nur ganzzahlige Lösungen sind gefragt) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit A wie in Aufgabe (11) und mit $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, und zwar

(a) mit dem Verfahren aus Abschnitt II,7 im Skript

(b) mit der Cramer'schen Regel aus II,8 oder LA1.

(14) Schreibe die Matrizen $M = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 \\ x & x^2+1 \end{bmatrix}$ und $N = \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x-1 & x^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}[x]^{2\times 2}$ als Matrixpolynome und dividiere M von rechts durch N derart, dass sich ergibt: $M = SN + R$ mit $R = 0$ oder $\deg R < 2$.

(15) Wofür ist der Satz 10.5 wichtig bei der Herleitung der rationalen kanonischen Form ?

(16) Sei K ein Körper. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Bézout für $M, N \in K[x]^{n\times n}$ und $A \in K^{n\times n}$:

$$\text{Wenn } N^\bullet(A) = 0, \text{ dann auch } \big(MN\big)^\bullet(A) = 0$$

(17) Geben Sie ein Beispiel von zwei Matrizen M, N aus $\mathbb{Q}[x]^{2\times 2}$ und einer Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ an, mit denen gilt: $\big(MN\big)^\bullet(A) \neq M^\bullet(A) \cdot N^\bullet(A)$.

(18) Bestimme die rationale kanonische Form von $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$.

Ist A diagonalisierbar ?

(19) Begründen Sie, warum zwei zweidimensionale $\mathbb{Z}$-Gitter im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ mehr als nur den Nullpunkt gemeinsam haben müssen.

(20) Sei U der von $q^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.4 \end{bmatrix}$ und $q^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.9 \end{bmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{2\times 1}$. Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem oder eine Basis für die Menge der ganzzahligen Punkte $U \cap \mathbb{Z}^{2\times 1}$ im Untervektorraum U. Geben Sie zuerst an, wie Sie vorgehen wollen.

Der Stoff bzw. die Verfahren zu den Aufgaben (19) und (20) wird bzw. werden demnächst in der Vorlesung behandelt. Die insgesamt 20 Aufgaben erfordern jeweils durchaus unterschiedlichen Zeitaufwand. So kann etwa Aufgabe (12) in wenigen Minuten erledigt werden. Die Aufgaben (19) und (20) waren Klausuraufgaben im Staatsexamen und es wurde dabei für beide zusammen eine halbe Stunde veranschlagt.