4.4 Zur Geschichte von Gauß-Algorithmus, Matrizen und Determinanten

Dieser Abschnitt ist dem Buch „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ von Egbert Brieskorn, mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz entnommen.

Etwa 2000 Jahre bevor in der europäischen Mathematik das Konzept der Matrix entstand, verwendeten chinesische Mathematiker Zahlenschemata zur Lösung linearer Gleichungssysteme, die den Koeffizientenmatrizen der linearen Gleichungssysteme entsprachen. In einem für die Ausbildung von Beamten geschriebenen Buch („Chiu Chang Suan Shu – Mathematik in neun Büchern“, etwa erstes Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung) traten Beispiele für lineare Gleichungssyteme auf.
Etwa: „3 Garben guter Ernte, 2 Garben mittlerer und 1 Garbe schlechter Ernte geben 39 dou Korn; entsprechend 2 Garben guter, 3 Garben mittlerer und eine Garbe schlechter 34 dou, und schließlich 1 Garbe guter, 2 Garben mittlerer und drei Garben schlechter 26 dou. Um auszurechnen, wieviel dou jeweils ein Garbe der drei Qualitätsstufen ergeben erschien auf dem Rechenbrett folgende Zahlentabelle des linearen Gleichungssystems (Gleichungen von oben nach unten und von rechts nach links.)

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Es gab eine Regel zur Lösung durch Multiplikation von Spalten und Subtraktion der Spalten voneinander, durch die die Tabelle in eine untere Dreiecksmatrix überführt wurde, wie beim Gauß-Algorithmus. Daraus waren die Lösungen leicht zu berechnen.

Auch in der neuzeitlichen europäischen Mathematik wurde der Gauß-Algorithmus lange Zeit vor Carl Friedrich Gauß (1777–1855) verwendet. Der französische Mönch und Algebraiker J. Buteo (1492–1572) etwa löste in seiner „Logistica“ (1559) lineare Gleichungssysteme nach diesem Verfahren. Während aber nach der Einführung der Determinanten (1750) durch Gabriel Cramer (1704–1752) bei theoretischen Untersuchungen linearer Gleichungssysteme überwiegend Determinantenmethoden verwendet wurden, legte Gauß in seinen umfangreichen Arbeiten zur angewandten Mathematik ein großes Gewicht auf die Verwendung oberer beziehungsweise unterer Dreiecksmatrizen bei den von ihm verwendeten Gleichungssystemen. Die Bezeichnung „Gauß-Algorithmus“ beruht also weder auf einer Gaußschen Erfindung noch auf der Hervorhebung des Verfahrens durch ihn in einem besonderen Satz. Aber während in der Mathematik sonst Determinantenverfahren vorherrschten, verschafften seine Arbeiten, in denen lineare Gleichungssysteme konsequent in Dreiecksform überführt wurden, ein solches Gegengewicht, dass man den entsprechenden Algorithmus später mit seinem Namen verband.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts verwendete man quadratische oder rechteckige Zahlenschemata (Matrizen) in der Zahlentheorie und der Geometrie. Die Bezeichnung „Matrix“ wurde 1850 von James Joseph Sylvester (1814–1897) eingeführt.

Gauß entwickelte in den „Disquisitiones arithmeticae“ (1801) die Multiplikation von 3×3 - Matrizen (ursprünglich für Matrizen über $\mathbb{Z}$). Augustin Louis Cauchy (1789–1857) übertrug die Multiplikationsvorschrift auf $n \times n$ - Matrizen über $\mathbb{R}$ und Gotthold Eisenstein (1823–1852) wies 1844 auf die Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation hin. Eisenstein gab auch das Determinantenkriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen.

Bei dem Versuch, eine möglichst einfache algebraische Charakterisierung von Matrizen (mit gewissen Zusatzeigenschaften) zu finden stieß Arthur Cayley (1821–1895) auf die Nützlichkeit der Addition von Matrizen. 1858 veröffentlichte er daher eine systematische Untersuchung der Matrizen unter Verwendung von Addition, Skalarmultiplikation und Multiplikation. In moderner Sprache würde man sagen, er führte die Matrizenalgebra ein. Ein großer Teil der Arbeiten zu Matrizen gegen Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts befasste sich mit der Untersuchung von Matrizenalgebren. In diesem Rahmen wurde dann auch von dem Schweizer Mathematiker Georg Frobenius (1849–1917) der Rang einer Matrix eingeführt.

Während Gauß in der Zahlentheorie Matrizen über $\mathbb{Z}$ betrachtete, richtete sich die Untersuchung der Matrizenalgebren gegen Ende des 19. Jahrhunderts auf solche über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Erst durch den nordamerikanischen Mathematiker Joseph Wedderburn (1882–1948) wurden Matrizen über beliebigen Körpern in das Blickfeld gerückt. Mit der Durchsetzung der „modernen Algebra“ in den 1920-er Jahren durch Emmy Noether (1882–1935), Emil Artin (1898–1962) und andere betrachtete man auch Matrizen über beliebigen Ringen.

Bevor Determinanten systematisch definiert und einer eigenen mathematischen Untersuchung unterzogen wurden, traten sie als Rechenhilfsmittel bei der Lösung linearer Gleichungssysteme auf. So entwickelte 1683 der japanische Mathematiker Shinsuke Kova Seki (1642?–1708) in Fortführung der alten chinesischen Tradition der nummerischen Auflösungsverfahren linearer Gleichungssysteme Rechenausdrücke, die der Verwendung von Determinanten entsprechen. Etwas später und völlig unabhängig davon traten in der europäischen Mathematik zum ersten Mal determinantenähnliche Rechenausdrücke auf, als (1683) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) in einem Brief an Giullaume-

François-Antoine de L'Hospital (1661–1704) eine Bedingung dafür angab, unter welchen Bedingungen ein homogenes System von drei Gleichungen in drei Unbekannten eine Lösung $\neq 0$ besitzt. Aber sein Brief blieb bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts unveröffentlicht und daher ohne Einwirkung auf die Herausbildung der Determinanten.

Ein unmittelbar weiterwirkender Ansatz zur Verwendung von Determinanten als Rechenausdrücken war Cramers Methode der Lösung von linearen Gleichungssystemen (1750). Er gab eine verbale Beschreibung der „Cramer'schen Regel" und dabei traten implizit Determinanten der Koeffizienten des Systems auf. Er gab aber keine eigene Definition für die Dinge, die später als Determinanten bezeichnet wurden.

Diesen Schritt tat erst 1771 Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) in einer Arbeit über lineare Eliminationstheorie. Er definierte Determinantenfunktionen von $n \times n$-(doppeltindizierten) Variablen durch einen Rekursionsprozess, den schon Etienne Bézout (1730–1783) vor ihm bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entwickelt hatte. Er führte auch eine eigene Notation für die von ihm definierten Funktionen ein. Vandermonde definierte damit die Cramer'sche Regel und gab einen Beweis (was Cramer nicht getan hatte). Er fand darüberhinaus einige Eigenschaften dieser Funktionen heraus: Vorzeichenwechsel bei Vertauschung von Zeilen oder Spalten, Gleichheit zu Null bei zwei gleichen Zeilen oder Spalten, Zerlegung in Determinanten von Untermatrizen.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Joseph Louis Lagrange (1736–1813) und Gauß setzten das Studium der Determinanten weiter fort und wendeten diese in anderen Zusammenhängen an, die heute nach ihnen bezeichnet werden (etwa Laplace-Entwicklung). Lagrange und Gauß verwendeten Determinanten unter anderem in der Zahlentheorie, und dabei stießen Lagrange für $n = 2$ und Gauß für $n = 3$ auf Spezialfälle des Determinantenmultiplikationssatzes.

Das war der Hintergrund für eine allgemeine systematische Studie Cauchys (1882). Er betrachtete Determinanten als Funktionen eines quadratischen Schemas von Variablen („système symmetrique") und stellte sie dadurch in enge Beziehung zu Matrizen. Er diskutierte Adjunkte und stellte eine Reihe von Sätzen über Relationen von Determinanten von Untermatrizen auf.