7.4 Zur Geschichte des Vektorraumbegriffs

Als Quellen für diesen Abschnitt liegen die Bücher [A. Beutelspacher, Lineare Algebra], [E. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie], [E. Scholz (Hrsg), Geschichte der Algebra] und [R. Siegmund-Schulze, Mathematiker auf der Flucht vor Hitler] zugrunde.

Das Geburtsjahr der linearen Algebra lässt sich ziemlich genau datieren. In den Jahren 1843 und 1844 ereigneten sich zwei Dinge, die für die Entwicklung der linearen Algebra von entscheidender Bedeutung waren.

Im Jahr 1843 erfand der irische Mathematiker William Rowan Hamilton (1805–1865) den Schiefkörper der Quaternionen, den ich zunächst vorstellen möchte.

Kommen wir auf die Definition der komplexen Zahlen zurück. Wir hatten $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit Addition und Multiplikation definiert. Indem wir die Multiplikation mit Elementen $(a,0)$ als Skalarmultiplikation interpretieren (und vergessen, dass wir auch die anderen Elemente in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ multiplizieren dürfen), ist $\mathbb{C}$ ein Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{R}$, eine Basis ist $1=(1,0)$ und $i=(0,1)$. Jede komplexe Zahl ist dann von der Form $a\cdot 1+b\cdot i$, oder, vereinfacht ausgedrückt, $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.
Viele Mathematiker des 19. Jahrhunderts haben sich die Frage gestellt, ob man den Prozess, die reellen Zahlen zu verdoppeln, eine neue Multiplikation zu definieren und so zu einem neuen Körper zu kommen, nicht wiederholen kann. Lange wurde herumexperimentiert, auf Tripeln (a,b,c) reeller Zahlen eine Multiplikation so zu definieren, dass ein Körper entsteht. Heute weiß man, dass dies nicht möglich ist.
Einer, der dies versuchte, war Hamilton. Er beschreibt seine erfolglosen Versuche in einem Brief an seinen Sohn wie folgt: „Every morning, on my coming down to breakfast you asked me: “Well, Papa, can you multiply triplets?“ Whereto I was obliged to reply, with a sad shake of the head: “No, I can only add and subtract them.““
Nach 13 Jahren unermüdlicher Suche entdeckte Hamilton, wie man auf dem Vektorraum (der Begriff existierte damals noch nicht) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, also den 4-Tupeln (a,b,c,d) von reellen Zahlen, eine Multiplikation so definieren konnte, dass fast ein Körper entstand. Alle Axiome für einen Körper waren erfüllt, nur auf die Kommutativität der Multiplikation mußte verzichtet werden. Eine solche algebraische Struktur nennt man einen **Schiefkörper**. In dem Vektorraum $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definieren wir 4 Elemente $1=(1,0,0,0)$, $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$, $k=(0,0,0,1)$ und identifizieren $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit der Menge der Linearkombinationen $a\cdot 1+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k=a+bi+cj+dk$.
Wir definieren eine Multiplikation durch

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

und

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Diese Gleichungen benutzend definieren wir das Produkt von $a + bi + cj + dk$ und $a' + b'i + c'j + d'k$ durch

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) \\ = \ & aa' + ab'i + ac'j + ad'k + bb'i^2 + bc'ij + bd'ik + ca'j + cb'ji + cc'j^2 + cd'jk \\ & + da'k + db'ki + dc'kj + dd'k^2 \\ = \ & aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' - bd' + ca' + db')j \\ & + (ad' + bc' - cb' + da')k. \end{aligned}$$

Indem wir eine reelle Zahl a mit $a \cdot 1$ identifizieren (und für einen Moment vergessen, dass wir auch die anderen Elemente multiplizieren dürfen), erhalten wir einen 4-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Mit der Addition und der oben definierten Multiplikation gelten alle Axiome für einen Körper, bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation.

Man nennt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit diesen Verknüpfungen den **Schiefkörper der Quaternionen** und bezeichnet ihn, Hamilton zu Ehren, mit $\mathbb{H}$. Die Elemente von $\mathbb{H}$ nennt man **Quaternionen**.

Hamilton war hauptsächlich an Problemen der Physik interessiert, die sich im dreidimensionalen Raum abspielten. Er spaltete daher ein Quaternion $a+bi+cj+dk$ in einen Anteil $bi+cj+dk$ und einen Anteil a auf. Den Anteil $bi+cj+dk$ nannte er „Vektor", den Anteil a „Skalar". Die Bezeichnungen Vektor und Skalar führte Hamilton deswegen ein, weil er mit dem Vektoranteil einer Quaternion geometrische und physikalische Größen wie gerichtete Strecken, gradlinige Bewegungen, Geschwindigkeit und Beschleunigung beschrieb (der Begriff Vektor kommt her von dem lateinischen Wort „vehere", tragen, führen, ziehen) und mit dem Anteil a ungerichtete, skalierbare Größen, wie etwa die Zeit. Hamilton entwickelte Methoden der Algebra und Analysis zum Rechnen mit Quaternionen und wendete sie auf die verschiedensten Untersuchungen der mathematischen Physik an. Hamilton war von den Quaternionen besessen. Als er 1865 starb, gab es 150 Veröffentlichungen zu den Quaternionen, von denen Hamilton 109 selbst geschrieben hatte. In seinem Nachlass fand man 60 Buchmanuskripte zu den Quaternionen.

Die von Hamilton völlig in der Sprache der Quaternionen entwickelte Vektorrechnung wurde in den folgenden Jahrzehnten fast ausschließlich von Physikern aufgenommen und weiterentwickelt. So stellte James Clerc Maxwell (1831–1879) physikalische Vektorgrößen der Elektrodynamik in Quaternionenschreibweise dar. Erst in der ersten Hälfte der 1880er Jahre lösten die Physiker Josiah Willard Gibbs (1839–1903) und Oliver Heaviside (1850–1925) den dreidimensionalen Vektorkalkül aus der Quaternionenschreibweise heraus und gaben ihm eine eigenständige Form. Danach wurde die Vektorrechnung (Algebra und Analysis) zu einem wichtigen Gebiet der mathematischen Physik, allerdings stets mit der Einschränkung auf den dreidimensionalen Fall. In die Lehre an den deutschen Technischen Hochschulen wurden die Maxwell-Heavisideschen Vektormethoden erst 1894 durch ein Lehrbuch von Föppl zur Elektrizitätslehre eingeführt.

Das zweite wichtige Ereignis in der Entwicklung des Vektorraumbegriffs war das 1844 erschienene Buch „Die lineale Ausdehnungslehre dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statistik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und Krystallonomie erläutert von Hermann Graßmann, Lehrer an der Friedrich-Wilhelms Schule in Stettin".

Graßmann (1809-1877) war ein ungewöhnlicher Mann. Er studierte in Berlin Theologie und klassische Philologie und wurde 1831 Lehrer in Stettin, dem heutigen Szczecin. Seine Interessen waren vielseitig, und seine Arbeit hat Auswirkungen in zwei Wissenschaftsgebieten hinterlassen: in den Sprachwissenschaften und in der Mathematik.

Die Hauptleistung seiner sprachwissenschaftlichen Untersuchungen war die Übersetzung der Rigveda, einer Sammlung altindischer religiöser Texte und der Herausgabe eines zugehörigen Wörterbuchs. Für diese Leistung wurde er 1876 mit der Ehrendoktorwürde der Universität Tübingen ausgezeichnet.

In seinem Werk über die Ausdehnungslehre hatte Graßmann in philosophisch gehaltener Sprache vorgeschlagen, „Ausdehnungsgrößen" (modern: Vektoren) in die Mathematik einzuführen. Durch die Theorie der „Ausdehnungsgebiete" (modern: n-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$) wollte er eine neue Fundierung der Geometrie möglich machen.

Graßmanns Werk blieb fast ohne Wirkung. Seine Darstellung war schwer lesbar, und seine verwirrenden philosophischen Gedankengänge waren für Mathematiker nicht nachvollziehbar.

1866 erschien eine Überarbeitung der Ausdehnungslehre, in der sich Graßmann einer mehr mathematischen Formulierung bediente. Graßmann führte seine Ausdehnungsgrößen als formale Linearkombinationen über den reellen Zahlen ein, definierte Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation und studierte deren Eigenschaften, er führte Basen („Systeme von Einheiten") und Dimension von Unterräumen („Stufenzahl von Gebieten") ein und entwickelte darauf seine Theorie. In einer Arbeit im Crelle-Journal 1855 ließ er auch Ausdehnungsgebiete über den komplexen Zahlen zu.

Dies hätte der Beginn einer modernen linearen Algebra sein können, aber auch die Überarbeitung von 1866 blieb fast ohne Wirkung.

1888 gab der italienische Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) eine axiomatische Definition eines Vektorraums, die bis auf sprachliche Nuancen unseren Axiomen eines Vektorraums über $\mathbb{R}$ entsprach. Er verwendete die Bezeichnung „sistemi lineari". Er betrachtete Unterräume, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit und die Dimension von Vektorräumen. Die Dimension konnte dabei durchaus unendlich sein. Als Beispiel gab er den Vektorraum der polynomialen Funktionen in einer Veränderlichen an. Peano führte lineare Abbildungen („operazione distributiva“) ein und erklärte für endlichdimensionale Vektorräume die Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen.

Weder Graßmann noch Peano konnten die mathematische Begriffsbildung des 19. Jahrhunderts merklich beeinflussen. Erst als sich in der Physik der dreidimensionale Vektorkalkül durchgesetzt hatte, drang der Begriff des Vektorraums in den ersten drei Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts in die Analysis und Algebra ein. In den Jahren 1904-1910 führte David Hilbert (1862–1943) zum Studium von Integralgleichungen lineare Gleichungssysteme in unendlich vielen Variablen ein. Seine Art, mit diesen Systemen zu arbeiten, zeigte eine deutliche Analogie zur Vektorraumgeometrie. Riesz führte 1913 für die betrachteten Systeme die Bezeichnung „vecteurs dans l’espace hilbertien “ ein. In der Zwischenzeit hatten der polnische Mathematiker Stephen Banach (1893–1945), der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener (1894–1964) und andere noch allgemeinere Vektorräume in die Untersuchungen der zeitgenössischen Analysis eingeführt, und Ende der zwanziger Jahre war die grundlegende, vereinheitlichende und vereinfachende Bedeutung des Vektorraumbegriffs in der Analysis sichtbar.

Während in der Physik und in der Analysis erst Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ die Rolle spielten, vollzog sich dazu parallel die Entwicklung zur sogenannten „modernen Algebra“.
Im Jahre 1886 war Felix Klein (1849–1925) an die Universität Göttingen berufen worden. Göttingen war von dem einflussreichen Berliner Kultusminister Althoff als zukünftiges Zentrum für die mathematischen Wissenschaften in Preußen ausgewählt worden. Althoff wollte der Berliner Universität ein von Klein geleitetes konkurrierendes Zentrum entgegenstellen. Die Wahl Göttingens war naheliegend. Die Universität konnte nicht nur Gauß sondern auch die Analytiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) und Bernhard Riemann (1826–1866) zu ihren ehemaligen Professoren zählen. Zwar gab es zum Zeitpunkt der Berufung Kleins noch keinen Mathematiker dieser überragenden Statur dort, aber es gelang Klein doch, ein mathematisches Seminar aufzubauen, das alle anderen übertraf und seinen Tod zumindest so lange überdauerte, bis es durch die Nationalsozialisten zerstört wurde, denen der wissenschaftliche Internationalismus ein Dorn im Auge war.
Eines der Gebiete, in denen die Göttinger Schule am produktivsten war, war die sogenannte moderne abstrakte Algebra, also die Strukturtheorie der Gruppen, Ringe, Körper und Algebren. Zwar war Klein selber kein Algebraiker, aber er tat viel, um diese Arbeitsrichtung zu unterstützen. Sein vielleicht wichtigster Beitrag in dieser Hinsicht war, dass er 1895 den jungen David Hilbert nach Göttingen holte. Mit Althoff im Rücken und Hilbert als Anziehungspol für andere Mathematiker begann Klein, sein Institut aufzubauen. Er reiste viel, um das Göttinger Ideal zu propagieren und suchte weltweit nach

Studenten. Er wurde von Althoff mit der Förderung der Frauenbildung beauftragt, und tatsächlich immatrikulierten sich eine Reihe von Studentinnen am Göttinger mathematischen Institut. Dazu gab es einen merkwürdigen Präzedenzfall. Sofia Kovalewskaja (1850–1891), die in Berlin bei Karl Weierstraß (1815–1897) studiert hatte, und dort aus formalen Gründen keinen Abschluss machen konnte, erwarb ihren Doktorgrad formal in Göttingen, obwohl sie dort nie eine Vorlesung gehört hatte. Später trug diese relativ progressive Tradition dazu bei, dass Emmy Noether (1882–1935), wie Sofia Kovalewskaja eine herausragende Mathematikerin, trotz aller Schwierigkeiten und Einschränkungen ihren Platz im Göttinger Institut fand.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde viel über die Natur der Definitionen in der Mathematik diskutiert. Man betrachtete sie als in irgendeinem Sinne wahr oder zumindest zutreffend und erklärte so die Anwendbarkeit der Mathematik auf die „wirkliche“ Welt. Hilbert brach mit dieser Anschauung. Seiner Auffassung nach enthält die Mathematik ihre besondere Geltung durch die abstrakte Korrektheit. Man macht gewisse Annahmen (Axiome), prüft nach, ob sie miteinander verträglich sind und zieht dann Schlussfolgerungen aus ihnen. Hilberts Ideen machten den Weg frei für eine grundlegende Umformulierung der Mathematik. Der jahrhundertelange Prozess der Umbildung mathematischer Begriffe und der Anspruch auf eigene Existenz unabhängig von den Naturwissenschaften hatte zu neuen Objektbereichen geführt: zu neuen Geometrien, zur Präzisierung der Infinitesimalrechnung, zu der ersten Definition der reellen Zahlen, und der Erschaffung völlig neuartiger Gebilde wie Gruppen, Ringen und Körpern. Diese konnten nun in einem einheitlichen Stil dargestellt und auf eine axiomatische Grundlage gestellt werden.

Hilbert war ein außergewöhnlicher, umfassend gebildeter Mathematiker. In seinem berühmt gewordenen Vortrag, den er anlässlich der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung im Jahre 1900 hielt, stellte er 23 offene mathematische Probleme vor, die er für zentral in der Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert hielt. Die Hilbertschen Probleme haben die Mathematik deutlich beeinflusst, einige von ihnen sind bis heute ungelöst. Das erste Hilbertsche Problem betraf die Gültigkeit der Kontinuumshypothese. Dies Problem wurde, wie Sie in 7.2 gesehen haben, durch die Arbeiten von Gödel (1906 – 1978) und P. J. Cohen auf überraschende Weise gelöst.

Die bedeutendste Protagonistin der durch Hilbert ausgelösten Bewegung der 1920er und 1930er Jahre war Amalie Emmy Noether. Ihr Vater war Max Noether, der selbst ein hervorragender Mathematiker war. Emmy Noether hatte in Erlangen studiert und promoviert, und sie begann 1907 sich in die Arbeiten Hilberts einzuarbeiten. Bis 1915 arbeitete sie unentgeltlich in Erlangen, danach versuchte sie, in Göttingen „Privatdozent“ zu werden. Die Mathematiker unterstützten sie, aber die Historiker und Philologen blockierten ihre Einstellung, weil sie eine Frau war. Das machte Hilbert wütend, von dem berichtet wird, dass er in der entsprechenden Fakultätssitzung darauf hinwies, dass man hier doch in einer Universität und nicht in einer Badeanstalt sei. Seine Intervention blieb zwecklos, bis 1923 blieb sie ohne Bezüge.

Mit der 1910 publizierten grundlegenden Arbeit von Ernst Steinitz (1871–1928) zur Körpertheorie und Arbeiten der amerikanischen Mathematiker Joseph Wedderburn (1882–1884) und Leonard Eugene Dickson (1874–1954) hatte die Algebra schon reichhaltiges Material zur Verallgemeinerung des sich in der Analysis und der Geometrie durchsetzenden Begriffs eines Vektorraums. So wurden von der Bewegung der „modernen Algebra“ anfangs der noch weitergehende Begriff eines Moduls von Krull 1925, Noether 1929 und van der Waerden 1930/31 eingeführt (Wolfgang Krull (1899–1971), Barthel van der Waerden (1903–?)).

Die entgültige Festschreibung des allgemeinen Vektorraumbegriffs über einem beliebigen Körper, und seine Differenzierung gegenüber dem Begriff des Moduls geht entscheidend auf Nicolas Bourbaki (1947) zurück. Möglicherweise gibt es eine entsprechende Unterscheidung dieser Begriffe bei einzelnen Autoren auch schon früher. Unabhängig davon bleibt die allgemeine Verbreitung der uns heute geläufigen Form des allgemeinen Vektorraumbegriffs und ihre tiefe Verankerung im Aufbau der Mathematik ein Verdienst des damals noch „jugendlichen “ Bourbaki.

Das Schicksal der Algebra des 20. Jahrhunderts ist mit den durch die Weltkriege erzeugten Einschnitten verbunden. Die Franzosen verloren, anders als die Deutschen, fast eine ganze Generation auf den Schlachtfeldern des ersten Weltkrieges. Sie hatten es daher schwer, in den 20er und 30er Jahren mit den Entwicklungen der „modernen Mathematik“ der Zwischenkriegsperiode mitzuhalten. Dagegen zerschlug der Antisemitismus der Nazis Zentren der Mathematik in Deutschland, wie etwa Berlin und Göttingen. Eine große Zahl von Mathematikern wurde entlassen (auch der Mengentheoretiker Ernst Zermelo (1871-1953) wurde wegen „politischer Unangepasstheit“ entlassen), wichtige Persönlichkeiten der Mathematik wurden ermordet oder in den Selbstmord getrieben, wie etwa Felix Hausdorff (1868-1942), und eine große Zahl von Mathematikerinnen und Mathematikern wurde in die Emigration gezwungen. Unter denen, denen die Flucht in die USA noch rechtzeitig gelang, waren auch Emmy Noether, Emil Artin (1898-1962) und Max Zorn (1906-1993).

Eine wichtige Rolle in der Überbrückung der Durststrecke in der Mathematik Frankreichs spielte der seltsam unangreifbare Mathematiker Nicolas Bourbaki, dessen Lebensdaten unbekannt sind, und der seine mathematische Produktivität Mitte der 30er Jahre begann. Bourbaki ist Autor eines enormen, systematischen Referenzwerks der moder-

nen Mathematik. Er hat eine Unmenge von Beiträgen bei Konferenzen eingereicht und organisiert noch heute jährlich drei Seminare. Sein Einfluss auf die zeitgenössische Mathematik, speziell auf die Algebra, ist immens. Es bleibt allerdings, wenn man über ihn berichten will, die Schwierigkeit, dass ihm biographisch schlecht beizukommen ist.
Tatsächlich ist Nicolas Bourbaki das Pseudonym einer sich selbst erneuernden Gruppe von Mathematikern, die größtenteils französischer Herkunft sind. Sie wurde im Jahr 1934 von André Weil (der als erster in einer Publikation den Namen Bourbaki verwendete), Henry Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Szolem Mandelbrojt und René de Possel gegründet. Anfangs setzte sich die Bourbaki-Gruppe eigentlich nur das eingeschränkte Ziel, ein neues Lehrbuch zur Differentialrechnung zu verfassen, welches das damals in Frankreich gängige ersetzen sollte. Bourbaki sah das damals übliche Standardwerk als den Anforderungen der 1930er Jahre nicht mehr gewachsen an. Das Projekt wuchs sich, nicht zuletzt durch die Verzögerungen und die damit verbundenen Diskussionen der Kriegszeit, nach 1945 schnell zu dem höchst ehrgeizigen Versuch aus, eine begrifflich präzise Grundlegung der gesamten Mathematik anzustreben. Aufgrund der Interessen der Gründer lag Bourbakis Interesse innerhalb der Algebra, in der Theorie der Liegruppen, in der Topologie und der Integrationstheorie. Andere Themen blieben bis heute unbearbeitet.
Die Mitglieder waren und sind aktive Mathematiker. Es ist schwer, ihren Einfluss als Individuen von ihrer kollektiven, pseudonymen Leistung zu trennen. Aber man kann durchaus eine Entwicklung, sogar eine Art Alterungsprozess sehen, weil der Charakter der Gruppe sich im Laufe der Jahre wandelte. Mitglieder werden ausgetauscht, wenn sie 50 Jahre alt werden. Neue Mitglieder werden als Ergebnis einer einstimmigen Entscheidung zur Teilnahme eingeladen.
Die Auffassungen Bourbakis verbreiteten sich weltweit und wurden für eine Zeit führend innerhalb der Mathematik.