8.7 Die Hauptachsentransformation

Wir wenden in diesem Abschnitt die Eigenwerttheorie an, um Kurven und Flächen zweiter Ordnung (dies sind die Nullstellenmengen von Polynomen vom Grade zwei von mehreren Veränderlichen) zu klassifizieren und auf eine Normalform zu transformieren, aus der man die geometrischen Eigenschaften sofort abliest.

Die Kurven kennen Sie als Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln und Geraden schon aus dem Schulunterricht. Zu den auftretenden Flächen gehören u.a. verschiedene Kegel, Zylinder, Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide, die bei der (computerunterstützten) Konstruktion von Werkteilen und Bauwerken eine große Rolle spielen.

Definition 8.95. *Es seien* $a_{jk}, b_j, c \in \mathbb{R}$, $j, k = 1, \ldots, n$, *gegeben. Dann heißt die Funktion*

$$p(\boldsymbol{x}) := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + c. \tag{8.17}$$

ein **Polynom vom Grade zwei** *in den* n *Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Die Nullstellenmenge $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : p(\boldsymbol{x}) = 0\}$ *eines Polynoms vom Grade zwei heißt* **Fläche zweiter Ordnung** *oder* **Quadrik**.

Mit der Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und den Vektoren $\boldsymbol{b} = (b_j)_j \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{x} := (x_j)_j \in \mathbb{R}^n$, kann man das Polynom p schreiben als

$$p(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c. \tag{8.17'}$$

Hierin kann man die Matrix $\boldsymbol{A}$ symmetrisch annehmen. Ist nämlich $a_{jk} \neq a_{kj}$, so faßt man die beiden zugehörigen Terme in (8.17) folgendermaßen neu zusammen:

$$a_{jk}x_jx_k + a_{kj}x_kx_j = \underbrace{\frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})}_{=:\tilde{a}_{jk}} x_jx_k + \underbrace{\frac{1}{2}(a_{kj} + a_{jk})}_{=:\tilde{a}_{kj}} x_kx_j.$$

Ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}$, so erhält man als einfachen und schon behandelten Spezialfall der Quadrik die Hyperebene $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c = 0$. Wir nehmen deshalb von nun an $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ an.

Beispiel 8.96.

$$p(\boldsymbol{x}) := x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 1$$

kann man schreiben als

$$p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{x} - 1.$$

□

Satz 8.97. (Normalformen von Polynomen zweiten Grades)
Es sei

$$p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$$

mit der symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}$ *in* $\mathbb{R}^{(n,n)}$ *und* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ *sowie* $c \in \mathbb{R}$ *ein Polynom vom Grade 2 in den* n *Komponenten des Vektors* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. *Dann gibt es eine Koordinatentransformation* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}$ *mit einer Drehungsmatrix* $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ *und einem Verschiebungsvektor* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, *so daß* p *in eine der beiden folgenden Normalformen transformiert wird:*

$$\tilde{p}(\boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 + \alpha \qquad (r = \operatorname{Rang} \boldsymbol{A} \leq n), \tag{8.18}$$

$$\tilde{p}(\boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 + \beta y_n \qquad (r = \operatorname{Rang} \boldsymbol{A} < n,\ \beta > 0). \tag{8.19}$$

Bemerkung 8.98. Der etwas später gegebene Beweis dieses Satzes ist konstruktiv, liefert also eine Methode zur Bestimmung der Transformation. Bevor wir uns allerdings an diesen Beweis begeben, demonstrieren wir die Anwendung des Satzes an zwei kleinen Beispielen. □

Beispiel 8.99. Aus dem Schulunterricht ist Ihnen bekannt, daß die Lösungsmengen der Gleichungen

$$x_2 - ax_1^2 = 0 \text{ bzw. } \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1 \text{ bzw. } \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$$

in der (x_1, x_2)-Ebene eine Parabel bzw. eine Ellipse bzw. eine Hyperbel (entsprechend der Abbildung 8.2) sind.

Was ist aber die Lösungsmenge von

$$p(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 11 = 0 \quad ?$$

Führt man – als Ergebnis der im Beweis des letzten Satzes zu findenden Konstruktion — die Variablentransformation

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}$$

durch, d.h. ersetzt man in $p(\boldsymbol{x})$ die Variablen gemäß

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) + 1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) + 2,$$

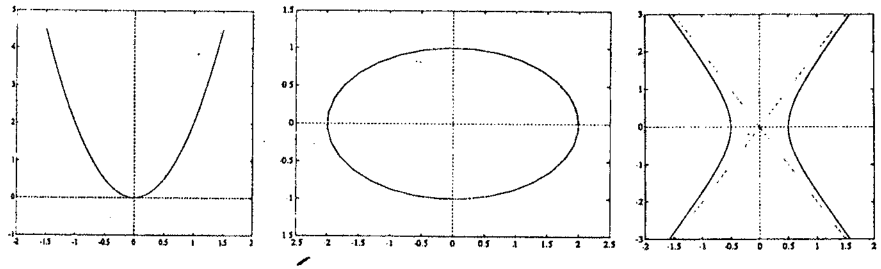

Abbildung 8.2: Parabel, Ellipse, Hyperbel in bekannter Lage

so ergibt sich (wenn man sich nicht verrechnet)

$$\tilde{p}(y) = p(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}) = -2y_1^2 + 2\sqrt{2}y_2,$$

und in den neuen y-Koordinaten identifiziert man mit den Schulkenntnissen die Lösungsmenge sofort als eine Parabel.

Wie die Parabel in den x-Koordinaten aussicht? — Nun, es ist auch eine Parabel. Nur liegt ihr Scheitel nicht mehr im Nullpunkt, sondern im Bild von $\boldsymbol{y}^{(0)} = 0$ unter der Abbildung $\boldsymbol{y} \longmapsto \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}$ also im Punkt $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{p}$ und jeder andere Punkt $\boldsymbol{y}^{(a)} = ({y_1}^{(a)}, {y_2}^{(a)})$ der (y_1, y_2)-Ebene (insbesondere auch jeder Punkt der „y-Parabel") wird durch ebendiese Abbildung in die (x_1, x_2)-Ebene abgebildet.

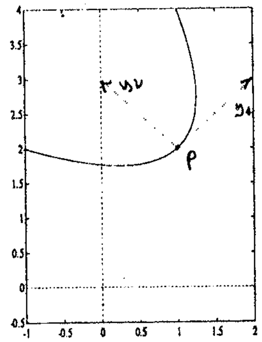

Abbildung 8.3

Der Nullpunkt des Koordinatensystems wird dabei in den durch $\boldsymbol{p}$ im x-System beschriebenen Punkt verschoben, und die Koordinatenachsen des y-Systems werden in Richtung der Spaltenvektoren der Matrix $\boldsymbol{Q}$ von diesem neuen Koordinatenursprung aus abgetragen. □

Beispiel 8.100. Für $p(\boldsymbol{x}) = 8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 5$ ergibt die Koordinatentransformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}$ mit

$$\boldsymbol{q} := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die transformierte Form

$$\hat{p}(\boldsymbol{y}) = 20 \cdot \left(\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1}\right)^2 - 1 \right) = 0.$$

$p(\boldsymbol{x}) = 0$ beschreibt also eine Ellipse mit in Richtung der Vektoren $\boldsymbol{q}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$ und $\boldsymbol{q}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T$ orientierten Halbachsen der Längen 2 bzw. 1 um den Mittelpunkt $\boldsymbol{p} = (2,1)^T$.

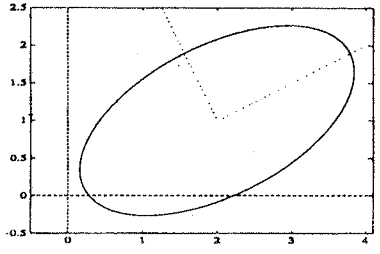

Abbildung 8.4

Bemerkung 8.101. Die Transformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}$, die nach Satz 8.97. das Polynom $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$ in die Normalform (8.18) oder (8.19) überführt, ist eine affine Koordinatentransformation. Es wird ein neues Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung $\boldsymbol{p}$ der **Mittelpunkt der Quadrik** ist und dessen Koordinatenrichtungen durch die Vektoren $(\boldsymbol{q}^1, \dots, \boldsymbol{q}^n)$ gegeben sind. $\boldsymbol{q}^1, \dots, \boldsymbol{q}^n$ heißen die **Hauptachsen** der Quadrik $p(\boldsymbol{x}) = 0$, die Transformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}$ heißt **Hauptachsentransformation.** □

Beweis: (von Satz 8.97.)
Wir transformieren zunächst den quadratischen Anteil $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ auf Diagonalgestalt. Ist $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Matrix, die als Spalten ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ enthält, so gilt für alle $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c &= (\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}) + c \\ &= \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + 2\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{q} + c \\ &= \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} + (2\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b})^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{q} + c, \end{aligned}$$

wobei die Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda} := \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ in der Diagonale die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ enthält.
Der quadratische Term $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}$ hat bereits die im Satz gewünschte "entkoppelte" Form $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle

1. Fall: $\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^n\}$

und

2. Fall: $b \notin \operatorname{span}\{a^1,\dots,a^n\}$

und werden zeigen, daß man $p(x)$ im ersten Fall in die Gestalt von (8.18) und im zweiten Fall in die Form (8.19) überführen kann.

1. Fall: In diesem Fall sind wir (mit $y := z$, $Q := U$ und $p := q$) fertig, wenn wir in der Transformation $x = Uz + q$ den Vektor q so wählen können, daß in der schon erreichten Form

$$x^TAx + b^Tx + c = \underbrace{z^TAz}_{T_Q} + \underbrace{(2Aq+b)^TUz}_{T_L} + \underbrace{q^TAq + b^Tq + c}_{T_C} \tag{8.20}$$

der linear von z abhängige Anteil T_L verschwindet.
Dies ist (für alle z) sicher genau dann der Fall, wenn $2Aq + b = o$ erreicht wird, d.h. wenn q Lösung des linearen Gleichungssystems $Aq = -\frac{1}{2}b$ ist. Für den Fall 1. hatten wir aber gerade vorausgesetzt, daß $b \in \operatorname{span}\{a^1,\dots,a^n\}$ gilt, was natürlich äquivalent zu $-\frac{1}{2}b \in \operatorname{span}\{a^1,\dots,a^n\}$ ist und damit gerade die Lösbarkeit des Systems $Aq = -\frac{1}{2}b$ bedeutet.

Anmerkung: Der Fall 1 liegt insbesondere dann vor, wenn Rang $A = n$ ist, wenn das den Vektor $p = q$ bestimmende Gleichungssystem $Aq = -\frac{1}{2}b$ also eindeutig lösbar ist.

Fall 2: In diesem Fall kann nicht so einfach verfahren werden, da hier das System $Aq = -\frac{1}{2}b$ voraussetzungsgemäß nicht lösbar ist. Wir streben in diesem Fall bei der Wahl von q in $x = Uz + q$ in der Gleichung (8.20) nun auch nicht mehr an, daß darin der lineare Teil T_L vollständig verschwindet. Ziel ist bei der Wahl von q zunächst, daß der konstante Term T_C verschwindet und daß der lineare Term T_L nur von den Komponenten von z abhängt, von denen der quadratische Term T_Q nicht abhängt. Daß der quadratische Term nicht mehr von allen Komponenten von z abhängt, ist wegen der Bedingung $b \notin \operatorname{span}\{a^1,\dots,a^n\}$ klar, denn hiernach ist $r := \operatorname{Rang} A < n$ und es verschwinden $n - r$ der Eigenwerte von A. In $z^TAz = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$ treten die entsprechenden z-Komponenten daher mit einem Null-Koeffizienten auf. Ordnen wir die Spalten von U so an, daß die ersten r dieser Vektoren zu den von Null verschiedenen Eigenwerten von A gehören, die wir dann o.B.d.A. mit $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ bezeichnen, so sieht man, daß

$$z^TAz = \sum_{i=1}^r \lambda_i z_i^2$$

mit $y_1 := z_1, \dots, y_r := z_r$ schon die in (8.19) gewünschte Form des quadratischen Teils hat.

Mit der neu getroffenen Anordnung der Spalten von U setzen wir nun $U =: (U_1, U_2)$ mit $U_1 \in \mathbb{R}^{(n,r)}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{(n,n-r)}$ und finden für den linearen Teil T_L aus (8.20) die Darstellung

$$\begin{aligned} T_C &= z^TU^T(2Aq+b) = z^T \begin{pmatrix} U_1^T(2Aq+b) \\ U_2^T(2Aq+b) \end{pmatrix} \\ &= (z_1,\dots,z_r)U_1^T(2Aq+b) + (z_{r+1},\dots,z_n)U_2^T(2Aq+b). \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, den Vektor q so zu bestimmen, daß der Anteil $(z_1,\dots,z_r)U_1^T(2Aq+b)$ für alle $z_1,\dots,z_r$ verschwindet. Dies fordert, daß

$$U_1^T(2Aq+b) = 0 \tag{8.21}$$

wird. Wegen

$$U_1^TA = U_1^TAUU^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & O \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} U^T$$

hat U_1^TA den Rang r, so daß das lineare Gleichungssystem $U_1^TAq = -\frac{1}{2}U_1^Tb$ lösbar mit einer $(n-r)$-parametrigen Lösungsmenge L ist. Ist $\tilde{q}$ eine spezielle Lösung und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = o$, so ist auch $\tilde{q} + v$ eine Lösung, und daher gilt

$$L = \{\tilde{q} + v \,:\, Av = o\}.$$

Setzen wir probeweise $q = \tilde{q} + \mu\tilde{v}$ mit einer speziellen Lösung $\tilde{q}$ von $U_1^TAq = -\frac{1}{2}U_1^Tb$, einer nichttrivialen Lösung $\tilde{v}$ von $Av = o$ und einer reellen Zahl μ in (8.20) ein, so ergibt sich (unter Berücksichtigung von $U_2^TA = 0$), daß

$$\begin{aligned} & x^TAx + b^Tx + c \\ = \; & \underbrace{z^TAz}_{T_Q} + \underbrace{(z_1,\dots,z_r)U_1^T(2A(\tilde{q}+\mu\tilde{v})+b) + (z_{r+1},\dots,z_n)U_2^T(2A(\tilde{q}+\mu\tilde{v})+b)}_{T_L} \\ & + \underbrace{(\tilde{q}+\mu\tilde{v})^TA(\tilde{q}+\mu\tilde{v}) + b^T(\tilde{q}+\mu\tilde{v}) + c}_{T_C} \\ = \; & \underbrace{\sum_{i=1}^r \lambda_i z_i^2}_{T_Q} + \underbrace{(z_{r+1},\dots,z_n)U_2^Tb}_{T_L} + \underbrace{\tilde{q}^TA\tilde{q} + b^T\tilde{q} + \mu b^T\tilde{v} + c}_{T_C}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit des linearen Terms T_L von $z_1,\dots,_r$ ist also wie gewünscht verschwunden, und zugleich sehen wir, daß wir auch den konstanten Term T_C durch die Wahl $\mu = \hat{\mu} := -(\tilde{q}^TA\tilde{q} + b^T\tilde{q} + c)/(b^T\tilde{v})$ eliminieren können, wenn nur das Element $\tilde{v}$ mit $A\tilde{v} = o$ so gewählt werden kann, daß $b^T\tilde{v} \neq 0$ wird.

Glücklicherweise folgt aus der Voraussetzung $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^n\}$ gerade die Lösbarkeit des Gleichungssystemes

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen Rang $\boldsymbol{A} = r < n$ können nämlich $n - r > 1$ der ersten n Gleichungen des letzten Systems gestrichen werden, und da $\boldsymbol{b}$ von den verbleibenden linear unabhängigen r Zeilenvektoren $\boldsymbol{a}^{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}^{i_r}$ linear unabhängig ist, hat das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}^{i_1})^T \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}^{i_r})^T \\ \boldsymbol{B}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine $(n - r - 1)$-parametrige Lösungsmenge aus lauter von Null verschiedenen Lösungen.

Wählen wir oben $\tilde{\boldsymbol{v}}$ als einen dieser Vektoren und bestimmen $\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{q}} + \mu\tilde{\boldsymbol{v}}$ mit dem oben angegebenen μ, so erreichen wir für die quadratische Form die Gestalt

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + (z_{r+1}, \dots, z_n)U_2^T\boldsymbol{b}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{U}_2^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{U}_2^T(2\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}) \neq \mathbf{o}$, denn sonst wäre $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}$ lösbar.

Mit den Methoden aus Kapitel 6 wählen wir nun eine Householder Matrix $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{(n-r,n-r)}$ mit

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}_2^T\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{U}_2^T\boldsymbol{b}\|_2\boldsymbol{e}^{n-r} \in \mathbb{R}^{n-r}$$

und hiermit die orthogonale Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & 1 & & O \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & O & & \boldsymbol{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y} := \tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{z}.$$

Dann folgt wegen $\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{V}}^T = \boldsymbol{\Lambda}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c &= \boldsymbol{y}^T\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{V}}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\tilde{\boldsymbol{V}}\begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{U}_2^T\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{U}_2^T\boldsymbol{b}\|_2\, y_n, \end{aligned}$$

und dies ist die Normalform in der Gestalt (8.19) mit $\boldsymbol{Q} := \boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{V}}^T$ und $\boldsymbol{p} := \tilde{\boldsymbol{q}} + \mu\tilde{\boldsymbol{v}}$.

$\boldsymbol{Q}$ is eine orthogonale Matrix. Durch Wahl des Vorzeichens des ersten Diagonalelements von $\tilde{\boldsymbol{V}}$ können wir erreichen, daß $\det \boldsymbol{Q} = 1$, d.h. $\boldsymbol{Q}$ eine Drehung ist.

∎