Lineare Algebra 2
SoSe 2003
Schmale

Klausur
Mittwoch 16. Juli 2003
12-15 Uhr W3 -1-161

Klausuraufgaben

(1) (12 Punkte) Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $P \in GL(3,\mathbb{R})$ derart, dass ${}^{t}PAP$ eine Diagonalmatrix ist und ermitteln Sie so die Trägheitsindizes der symmetrischen Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $P \in \mathcal{O}(3)$ derart, dass ${}^{t}PAP$ eine Diagonalmatrix ist.

(2) (8 Punkte) Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A.

(3) (14 Punkte) Gegeben sind die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und der reelle Vektor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die kürzeste Lösung $v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ des linearen Gleichungssytems „$Ax = b$“ .

(b) Bestätigen Sie, dass der Vektor b die Projektion des Vektors $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ auf den Untervektorraum $U = \mathsf{Bild}\, L_A$ ist.
(L_A ist die zu A gehörende lineare Abbildung).

(c) Wegen (b) wissen wir: Ihre Lösung v aus (a) ist der kürzeste Vektor aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$, der den Abstand $\| Ax - c \|$ minimiert. Letzteres soll bedeuten: $\| Av - c \| \leq \| Ax - c \|$ für alle x aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
Kann es einen von c verschiedenen Vektor c' geben, für den derselbe Vektor v den Abstand $\| Ax - c' \|$ ebenfalls minimiert ?

Bis hierher sind maximal 34 Punkte möglich (≈1/3)

Ab hier sind maximal 66 Punkte möglich (≈2/3)

(4) (7 Punkte) Sei $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$ Körper mit 4 Elementen. Es gilt dabei $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Wenn Sie das vorziehen, können Sie stattdessen $\mathbb{F}_4$ auch in der Schreibweise $\mathbb{Z}_2[x]_{2,x^2+x+1}$ mit x statt α benutzen.
Seien nun $f = \alpha y^3 + y^2 + \alpha y + 1$ und $h = y^3 + \alpha y^2 + y + \alpha$ Polynome aus $\mathbb{F}_4[y]$. Bestimmen Sie $u, w \in \mathbb{F}_4[y]$ mit der Eigenschaft $uf + vh = g$, wobei g ein größter gemeinsamer Teiler von f und g ist.
Zur Rechenkontrolle: Der normierte ggT von f und g ist $y^2 + 1$.

(5) (12 Punkte)

(a) Sei $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen $P \in GL(2, \mathbb{Z}_2)$ mit der Eigenschaft ${}^{\mathsf{t}}PP = E$ bzw. $P^{-1} = {}^{\mathsf{t}}P$.

(6) (12 Punkte) Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathsf{Lös}_{\mathbb{Z}}(A, b) = \{v \in \mathbb{Z}^{2\times 1} :\ Ax = b\}$, und zwar für

$$\text{(i)}\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} :\ a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } \mathsf{Lös}_{\mathbb{Z}}(A, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) \neq \varnothing \right\}$

(7) (9 Punkte) Sei K ein Körper und $p = x^2 + a_1 x + a_0$ ein unzerlegbares Polynom aus $K[x]$. Geben Sie jeweils eine Matrix $A \in K^{4\times 4}$ an,

(a) für die p^2 der einzige Elementarteiler ist,

(b) für die p, p die beiden einzigen Elementarteiler sind,

(c) deren Minimalpolynom p^2 ist.

(Zur Erinnerung: der letzte invariante Faktor $(xE - A)$ ist das Minimalpolynom von A.)

(8) (9 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Schreiben Sie die Polynommatrix $(x^2 - 2x + 1)E_2 \in R[x]^{2\times 2}$ als Matrixpolynom $M = Ex^2 + M_1 x + M_0$.

(b) Dividieren Sie M von rechts mit Rest durch $(xE - A)$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und mit $a \in R$.

(c) Was können Sie über die Anzahl der Rechtsnullstellen von M sagen in Abhängigkeit von R ?
(Eine Rechtsnullstelle von M ist eine Matrix $B \in R^{2\times 2}$ derart,dass $M^{\bullet}(B) = 0$.)

(9) (7 Punkte) Sei K ein Körper, $A \in K^{3\times 3}$ und $\mu(A)$ das Minimalpolynom von A. Die Smithform der charakteristischen Matrix $(xE - A)$ von A sei $\operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$. Dabei sind d_1, d_2, d_3 Polynome mit höchstem Koeffizienten 1.

(a) Welche Möglichkeiten gibt es für den Grad $\mathsf{deg}\,\mu(A)$ des Minimalpolynoms. (vgl. Erinnerung bei Aufgabe (8).)

(b) Begründen Sie, warum $\mu(A)$ nicht unzerlegbar sein kann, wenn $\mu(A)$ den Grad 2 hat.

(10) (10 Punkte) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem für den Durchschnitt der beiden folgenden $\mathbb{Z}$-Untermoduln U und W von $\mathbb{Z}^{2\times 1}$:

$$U =< \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} >_{\mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad W =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} >_{\mathbb{Z}}$$

Insgesamt sind maximal 100 Punkte zu erreichen.
Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 40 Punkte erreicht werden.

Für einige **Studierende der Informatik** gilt die Regelung, dass sie Aufgaben im Umfang von ca. 66 Punkten bearbeiten sollen, z.B. die Aufgaben (4)-(10), es kann aber frei gewählt werden. Es sind für diese Studierenden mindestens 27 Punkte notwendig, um die Klausur zu bestehen.
Wichtig: Wenn Aufgaben im Umfang von deutlich mehr als 66 maximal möglichen Punkten ganz oder teilweise bearbeitet werden, **dann muss genau angegeben werden, welche der Aufgaben gewertet werden sollen**. Diese Aufgaben müssen ca. 66 Punkte ermöglichen. Wenn dies nicht angegeben wird, werden nur diejenigen Aufgaben bewertet, die zuerst durchgesehen wurden bis zu einer maximal erreichbaren Punktzahl von 66 !!