§12 Lineare Abbildungen euklidischer Vektorräume

Lineare Abbildungen sind die "strukturerhaltenden" Abbildungen von Vektorräumen, die sogenannten "Morphismen". Euklidische Vektorräume haben zusätzliche Struktur. Die zugehörigen "Morphismen" sind die metrischen Abbildungen und Isometrien.

Definition 1: Seien V, W euklidische Vektorräume mit Skalarprodukten $(\!(\, , \,)\!)_1$, $(\!(\, , \,)\!)_2$ und sei $F : V \to W$ linear. F heißt **metrisch(-e lineare Abbildung)** bzw. **mit dem Skalarprodukt verträglich,** wenn für alle $v, v' \in V$ gilt.

$$(\!(F(v) \, , F(v'))\!)_2 = (\!(v \, , v')\!)_1$$

Man lässt dabei i. A. bei den Skalarprodukten die Indizes weg, da ja stets klar ist "wo" man sich befindet.

Beobachtung 2: Metrische lineare Abbildungen sind injektiv.

Beweis $\forall v \in V : F(v) = 0 \Rightarrow (\!(F(v) \, , F(v))\!) = 0 \underset{\text{F metrisch}}{\Rightarrow} (\!(v \, , v)\!) = 0 \Rightarrow v = 0$ □

$F(V)$ und V sind also bei einer metrischen lineare Abbildung isomorph. Wir konzentrieren uns auf metrische Endomorphismen, dann ist $V = W$, und $(\!(\, , \,)\!)_1 = (\!(\, , \,)\!)_2$. Man erhält dann die sogenannten Isometrien:

Definition 3: Sei V ein euklidischer Vektorraum bzgl. $(\!(\, , \,)\!)$ und $F : V \to V$ linear.
(a) F heißt **Isometrie** oder **abstandstreu**, wenn für alle $v, v' \in V$ gilt: $d(F(v), F(v')) = d(v, v')$ dabei ist (Wdhlg.) $d(v, v') = \sqrt{(\!(v - v' \, , v - v')\!)} = \| \, v - v' \, \|$
(b) F heißt **längentreu**, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\| \, F(v) \, \| = \| \, v \, \|$
(c) F heißt **winkeltreu**, wenn für alle $v, v' \in V$ gilt:

$$(\!(F(v) \, , F(v'))\!) \cdot \| \, v \, \| \cdot \| \, v' \, \| = (\!(v \, , v')\!) \cdot \| \, F(v) \, \| \cdot \| \, F(v') \, \|$$

Bei (c) erinnere man sich an 11.5 oder [F], S. 276.

Beobachtung 4: Sei V euklidisch, $F : V \to V$ linear. Es gilt:

$$\begin{array}{lclcl} F \text{ metrisch} & \Leftrightarrow & F \text{ Isometrie} & \Leftrightarrow & F \text{ längentreu} \\ \Downarrow & & & & \\ F \text{ winkeltreu} & & & & \end{array}$$

Beweis: F längentreu $\Rightarrow F$ metrisch:
Seien $v, v' \in V$. Dann ist zunächst $(\!(v + v' \, , v + v')\!) = (\!(v \, , v)\!) + 2(\!(v \, , v')\!) + (\!(v' \, , v')\!)$.

M.a.W. $(\!(v \, , v')\!) = \frac{1}{2} \left((\!(v + v' \, , v + v')\!) - (\!(v \, , v)\!) - (\!(v' \, , v')\!) \right)$. Dies gilt auch für $F(v), F(v')$ statt v, v' und da F längentreu ist, folgt:

$$\begin{aligned} (\!(F(v) \, , F(v'))\!) &= \frac{1}{2} \Big((\!(\underbrace{F(v) + F(v')}_{F(v+v')} \, , \underbrace{F(v) + F(v')}_{F(v+v')})\!) - (\!(F(v) \, , F(v))\!) - (\!(F(v') \, , F(v'))\!) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \left((\!(v + v' \, , v + v')\!) - (\!(v \, , v)\!) - (\!(v' \, , v')\!) \right) = (\!(v \, , v')\!) \end{aligned}$$

Alle übrigen Implikationen ergeben sich direkt aus den Definitionen. □

Bemerkung 5: **(a)** Wenn F längentreu, $\lambda, \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}$, dann ist $\lambda \cdot F$ nicht mehr längentreu, denn $\parallel (\lambda \cdot F)(v) \parallel = |\lambda| \parallel F(v) \parallel = |\lambda| \parallel v \parallel$. Allerdings ist $\lambda \cdot F$ immer noch winkeltreu!

(b) Verbreitete Bezeichnung: *"orthogonale" Abbildung* für Isometrie eines euklidischen Vektorraumes. ($\rightarrow$ [F] S. 303)

(c) Längentreue Abbildungen sind relevant in der angewandten Mathematik, Numerik, bei Optimierungsaufgaben wie z. B. bei der Ausgleichsrechnung.

Die Forderung nach der Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt allein ist schon so stark, dass sie die Linearität erzwingt.

Beobachtung 6: Sei V euklidischer Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall v, v' \in V : \quad (\!(f(v)\,, f(v'))\!) = (\!(v\,, v')\!) \tag{1}$$

dann ist f linear.

Beweis: Sei $U = < \{f(v) : v \in V\} >_{\mathbb{R}}$ der von $f(V)$ erzeugte Untervektorraum von V. Seien $v, v' \in V$ und $w := f(v+v') - f(v) - f(v')$. Es ist $\boldsymbol{w \in U}$ und wir müssen zeigen $w = 0$. Für alle $v'' \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} ((w, f(v''))) &= (\!(f(v+v')\,, f(v''))\!) - (\!(f(v)\,, f(v''))\!) - (\!(f(v')\,, f(v''))\!) \\ &\underset{(1)}{=} (\!(v+v'\,, v'')\!) - (\!(v\,, v'')\!) - (\!(v'\,, v'')\!) \underset{((\ ,\ ))\text{ bilinear}}{=} 0 \end{aligned}$$

Dann gilt aber auch $w \perp U$ und insbesondere $w \perp w$ bzw. $(\!(w\,, w)\!) = 0$, denn $w \in U$. Es folgt $w = 0$. Analog zeigt man für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $w = f(\lambda v) - \lambda f(v)$, dass gilt: $w \perp U$ $\square$

Standardbeispiel 7: Sei $V = \mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt: $\boldsymbol{(\!(v\,, v')\!) = {}^{\mathsf{t}}vv}$. für $v, v' \in V$ und sei $\boldsymbol{F = L_A}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. F Isometrie. Dann muss für $1 \leq i,\ j \leq n$ gelten:

$$(\!(e_i\,, e_j)\!) = \delta_{ij} = (\!(F(e_i)\,, F(e_j))\!) = (\!(A_{\bullet i}\,, A_{\bullet j})\!) = {}^{\mathsf{t}}A_{\bullet i} \cdot A_{\bullet j}$$

M. a. W: Es gilt dann ${}^{\mathsf{t}}AA = E_n$

Definition 8: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, wenn gilt:

$${}^{\mathsf{t}}AA = E_n \tag{2}$$

Konsequenter wäre die Bezeichnung: **"orthonormiert"**.

Beobachtung 9: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Sowohl die Spalten als auch die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis. Außerdem gilt: $\det A = \pm 1$, $A^{-1} = {}^{\mathsf{t}}A$, $A{}^{\mathsf{t}}A = E_n$ und $A \in Gl(n, \mathbb{R})$.

Beweis: Wegen (2) bilden die Spalten von A eine Orthonormalbasis. Da $E_n = {}^{\mathsf{t}}AA$, gilt auch $A^{-1} = {}^{\mathsf{t}}AAA^{-1} = {}^{\mathsf{t}}A$ und somit $E_n = AA^{-1} = A{}^{\mathsf{t}}A$. Also bilden auch die Zeilen von A eine Orthonormalbasis. Da $1 = \det E_n = \det A{}^{\mathsf{t}}A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$, folgt: $\det A \pm 1$. $\square$

Satz 10: $\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ orthogonal}\}$ ist eine Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$,
$S\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) : \det A = 1\}$ ist Untergruppe von $\mathcal{O}(n)$.

Beweis: mit A, B sind auch $A \cdot B$ und $A^{-1} = {}^{\mathsf{t}}A \in \mathcal{O}(n)$.
Bemerkung: $S\mathcal{O}(n)$ ist sogar ein sogenannter Normalteiler in $\mathcal{O}(n)$ d.h.: für alle $A \in S\mathcal{O}(n)$, $B \in \mathcal{O}(n)$ ist $BAB^{-1} \in S\mathcal{O}(n)$. $\square$

Beispiel 11: (a) $\mathcal{O}(1) = \{1, -1\}$

(b) Behauptung

$$A \in \mathcal{O}(2) \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : [A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ oder } A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & -a \end{bmatrix}] \textbf{ und } a^2 + b^2 = 1.$$

Beweis: Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(2)$.

$A^{\mathsf{t}}A = E_2$ bedeutet $\boxed{a^2 + b^2 = 1,\ ac + bd = 0,\ c^2 + d^2 = 1}$

${}^{\mathsf{t}}AA = E_2$ bedeutet $\boxed{a^2 + c^2 = 1,\ ab + cd = 0,\ b^2 + d^2 = 1}$

Es folgt: $b = \pm c,\ a = \pm d$ also: $d = \pm a$. Wenn $d = a$: dann $c = -b$. Wenn $d = -a$: dann $c = b$.
Umgekehrt rechnet man nach, dass solche Matrizen orthogonal sind.

(c) Geometrische Interpretation von $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}}$ und $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 1}$:

Dann ist $\mathsf{det}\, A = -1$ und $\sigma(A) = \{1, -1\}$, denn

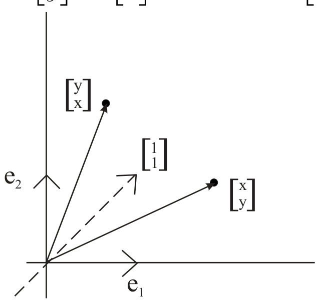
$$\mathsf{det}\,(A - tE) = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1 = (t+1)(t-1).$$

A ist demnach diagonalisierbar. Man berechnet

$$W := \mathsf{Eig}\,(A, 1) =< \begin{bmatrix} b \\ 1 - a \end{bmatrix} >_{\mathbb{R}} \text{ und } \mathsf{Eig}\,(A, -1) =< \begin{bmatrix} b \\ -1 - a \end{bmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

L_A ist die **Spiegelung an *W*.**

Sonderfall: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Hier ist $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ und $W =< \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} >_{\mathbb{R}}$.



Beachte: A ist im Sonderfall eine 2×2-Permutationsmatrix.

(d) Geometrische Interpretation von $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}}$ mit $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 1}$:

Sei $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor der Länge 1, also mit $x^2 + y^2 = 1$. Auch $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ hat die Länge 1 und es ist

$$\langle\!\langle \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ax + by \\ -bx + ay \end{bmatrix} \rangle\!\rangle = a(x^2 + y^2) = a = \cos \underbrace{\measuredangle(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})}_{=:\varphi} \left(\begin{smallmatrix} \text{siehe 11.5} \\ [F] S.276 \end{smallmatrix} \right).$$

Offensichtlich ist φ unabhängig von $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

L_A ist die **Drehung um φ gegen den Uhrzeigersinn** (vgl. [F] S. 106 / 107).

Beachte: Wenn $a = \cos\varphi$ und $a^2 + b^2 = 1$, dann ist $b = \pm \sin\varphi$. Man berechnet noch: $\sigma(A) = \{a + ib, a - ib\}$.

(e) Elementare orthogonale Matrizen für $n > 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & a & \cdots & b & & \\ & & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & & 1 & & & \\ & & c & \cdots & d & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ wie in (b)(c)(d) } 2 \times 2\text{-Drehung oder Spiegelung}$$

Beachte: die Elementarmatrizen P^i_j sind elementare orthogonale Matrizen mit Determinante -1.

(f) Permutationsmatrizen sind orthogonal als endliche Produkte von Elementarmatrizen (Vertauschungsmatrizen).

Matrixdarstellungen von Isometrien, strukturgerechte Basiswahl und Koordinatisierung.

Beobachtung 12: Seien V ein euklidischer Vektorraum, $\mathsf{dim}_V = n$, $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis. Dann ist die Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^{n\times n} \to V$ metrisch (Def. 1), wobei in $\mathbb{R}^{n\times n}$ das Standardskalar-Produkt benutzt wird.

Beweis: Seien $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i,\ w = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i v_i \in V,\ x = {}^t[x_1, \ldots, x_n],\ y = {}^t[y_1, \ldots, y_n]$. Dann gilt:

$$(\!(\Phi_{\mathcal{A}}(x)\,, \Phi_{\mathcal{A}}(y))\!) = (\!(u\,, w)\!) \underset{\mathcal{A} \text{ ist Orthonormalbasis}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t x y = (\!(x\,, y)\!) \qquad \square$$

Für "strukturgerechte" Matrixdarstellungen erhalten wir:

Satz 13: Sei V ein euklidischer Vektorraum, $\mathsf{dim}_V = n$, $F : V \to V$ linear, $\mathcal{A}$ Orthonormalbasis und $A := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$. Dann gilt

$$F \text{ Isometrie } \Leftrightarrow L_A \text{ Isometrie } \Leftrightarrow A \text{ orthogonal}$$

Bem."F Isom. $\Leftrightarrow$ A orthog." siehe [F] S. 305. Der dortige Beweis unterdrückt wichtige Rechnungen (bei uns Beobachtung 12).

Wir benutzen:

Hilfssatz 14: (a) die Hintereinanderausführung metrischer (linearer) Abbildungen ist wieder metrisch.

(b) die Umkehrabbildung surjektiver metrischer (linearer) Abbildungen ist wieder metrisch
Bew. Nachrechnen als Übung.

Bew. von Satz 13:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V \\ \Phi_{\mathcal{A}} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^{n\times 1} & \xrightarrow[L_A]{} & \mathbb{R}^{n\times 1} \end{array} \qquad A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$$

Es gilt (LA1): $L_A = \Phi^{-1}_{\mathcal{A}} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ und $F = \Phi_{\mathcal{A}} \circ L_A \circ \Phi^{-1}_{\mathcal{A}}$. Nach Hilfssatz 14 und Beobachtung 12 ist also die erste "$\Leftrightarrow$" richtig.

L_A Isometrie $\Rightarrow A$ orthogonal: siehe Beispiel 7.

A orthogonal L_A Isometrie: A orthogonal heißt nach Beobachtung 9:
$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_i = A_{\bullet i}$ ist eine Orthonormalbasis bon $R^{n\times n}$. Daher ist $L_A = \Phi_{\mathcal{A}}$ metrisch nach Beobachtung. 12. $\square$

kurz: "wenn man Orthonormalbasen zugrundelegt, passt alles", alle Abbildungen im Standarddiagramm (s.o.) sind metrisch.

Zwei Fragen entstehen hier:

(I) lässt sich die Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ so wählen, dass $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = A$ "schön" ist?
Mit anderen Worten: gibt es $P \in \mathcal{O}(n)$ derart, dass $P^{-1}AP = {}^tPAP$ "schön" ist; "orthogonale Ähnlichkeit"

(II) Was bewirken "orthogonale Zeilenumformungen" und speziell: lässt sich eine orthogonale Matrix P als Produkt gewisser "elementarer orthogonaler" Matrizen darstellen?

Zuerst (II) (wichtiger für Anwendungen , (I) ist schwieriger)

Wir brauchen genauerer Bezeichnungen:

Definition 15: Sei $P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \iddots & \\ & & a & & 0 & & b & & \\ & & \vdots & \ddots & & \iddots & \vdots & & \\ & & 0 & & 1 & & 0 & & \\ & & \vdots & \iddots & & \ddots & \vdots & & \\ & & \varepsilon_2 \cdot b & \cdots & 0 & \cdots & \varepsilon_1 \cdot a & & \\ & \iddots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$,

eine elementare orthogonale Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt dann $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1,\ a^2 + b^2 = 1$. Die Nummern der von der Einheitsmatrix abweichenden Zeilen/Spalten seien i, k mit $i < k$.

P heißt:

(a) elementare Drehung (smatrix), Bezeichnung $D(i, k; a, b)$, wenn $\varepsilon_1 = 1$ (und dann $\varepsilon_2 = -1$)

(b) elementare Spiegelung (smatrix), Bezeichnung $S(i, k; a, b)$, wenn $\varepsilon_1 = -1$ (und dann $\varepsilon_2 = 1$).

Beispiel bei $\boldsymbol{n = 3}$: Wir betrachten $D(1, 3; a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{bmatrix}$, und $S(1, 3; a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{bmatrix}$. In beiden Fällen lässt die entsprechende lineare Abbildung den Vektor e_2 und damit auch die ganze "Achse" $< e_2 >_{\mathbb{R}}$ punktweise fest. Im ersten Fall findet in der Ebene $< e_1, e_3 >_{\mathbb{R}}$ eine Drehung, im zweiten Fall eine Spiegelung statt.

Beachte: $\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ ist ein wohldefinierter Punkt auf dem Einheitskreis und $\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} e_1 = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$. Es wird also nach $\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$ und analog e_2 nach $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ gedreht.

Der "Drehwinkel" kann demnach mit Hilfe von $\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$ (etwa) festgelegt werden. Dies geschieht meist durch folgende Bijektion:

$$[0, 2\pi) \to C_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\} \quad , \varphi \mapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Beobachtung 16: Es gilt:

$D(i, k; a, b)^{-1} = D(i, k; a, -b)$ und $S(i, k; a, b)^{-1} = S(i, k; a, b)$

Satz 17: Sei $n \geq 2$. Zu $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt es $r \in \mathbb{N}_+$ und elementare orthogonale Matrizen $Q_1, \ldots, Q_r$ so dass $Q_r \ldots Q_1 A$ in Zeilenstufenform ist mit positivem Eckeinträgen bis zur mindestens vorletzten Zeile $\neq 0$ und mit $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Jedes $Q_i,\ 1 \leq i \leq r$ kann entweder als elementare Spiegelung oder als elementare Drehung gewählt werden. Insbesondere sind die beiden folgenden Fälle stets realisierbar:

'**alle** Q_i el. Drehung' und '**alle** Q_i el. Spiegelung'

Beweis: Konstruktiv, Induktion nach n. Wenn man elementare orthogonale Matrizen für $n = 1$ als $+1, -1$ festlegt, dann ist $n = 1$ möglich, es lohnt aber den Fall $n = 2$ zusätzlich zu betrachten.

$\boldsymbol{n = 2}$: Sei $A = \begin{bmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times m}$. Wenn $a_1 = a_2 = 0$, dann ist $A = \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{\begin{matrix} a_1' & * \\ a_2' & * \end{matrix}}_{=A'} \\ 0 & \end{bmatrix}$,

falls $m \geq 2$ und man betrachtet A'; wenn die Behauptung für A' gilt, dann auch für A.

Sei also o. E: $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ **oder** $\boldsymbol{a_2 \neq 0}$.

Dann ist $\mathrm{D}\big(1, 2; \frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}\big) \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\delta} & \frac{a_2}{\delta} \\ \frac{-a_2}{\delta} & \frac{a_1}{\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$

und ebenso $S\left(1, 2, \frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}\right) \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\delta} & \frac{a_2}{\delta} \\ \frac{a_2}{\delta} & \frac{-a_1}{\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ wobei $\delta = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} > 0$.

Beidesmal liegt eine Zeilenstufenform vor mit positivem Eckeintrag in der ersten Zeile und es ist $r \leq 1$.

$\boldsymbol{n \geq 2}$ **:** Die Behauptung sei richtig für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, und $A \in R^{(n+1) \times m}$, und sei o. E. die erste Spalte von A nicht 0. Sei etwa $A = \begin{bmatrix} a_1 & \\ \vdots & \\ a_k & * \\ \vdots & \\ a_{n+1} & \end{bmatrix}$.

Wenn $a_2 = \cdots a_{n+1} = 0$, dann ist $a_1 \neq 0$ und

$$D(1,2;\frac{a_1}{|a_1|},0)\ A = \begin{bmatrix} |a_1| & * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \text{(Drehung um } 180^\circ \text{ oder } \pi).$$

Die selbe erste Spalte erreicht man aber auch mit $S(1,2;\frac{a_1}{|a_1|},0)$ statt $D(1,2;\frac{a_1}{|a_1},0)$.

Wenn etwa $a_k \neq 0$ für ein $k > 1$, dann ist

$$D(1,k;\frac{a_1}{\delta},\frac{a_k}{\delta})A = \begin{bmatrix} \delta & \\ a_2 & \\ \vdots & \\ a_{k-1} & * \\ 0 & \\ a_{k+1} & \\ \vdots & \\ a_{n+1} & \end{bmatrix} \qquad \text{mit } \ \delta = \sqrt{a_1^2 + a_k^2} > 0$$

Wichtig: Die Einträge $a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{n+1}$ bleiben unberührt, und das Gleiche funktioniert auch mit"S" statt "D"! Ist nun noch $a_l \neq 0,\ l \neq 1, l \neq k$ dann ist

$$D\left(1,l;\frac{\delta}{\delta'}\frac{a_l}{\delta'}\right)\ D\left(1,k,\frac{a_1}{\delta'}\frac{a_k}{\delta}\right) A = \begin{bmatrix} \delta & \\ * & \\ 0 & * \\ * & \\ 0 & \\ * & \\ a_{n+1} & \end{bmatrix}$$

und $\delta' = \sqrt{\delta^2 + a_\ell^2} > 0$; analog mit "$S$" statt "$D$". Nach höchstens n Schritten ist erreicht, dass

$$Q_{\nu_1} \cdots Q_1 A = \begin{bmatrix} \delta_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \nu_1 \leq n$$

mit elementaren orthogonalen Matrizen $Q_1, \ldots, Q_{\nu_1}$ jeweils "S" oder "D", wie wir wollen. Wenn $m = 1$, ist man fertig. Wenn $m > 1$ ist $A' \in \mathbb{R}^{n \times (m-1)}$. Es gibt dann nach Induktionsannahme $Q'_1, \cdots, Q'_{r'}$ derart, dass $Q'_{r'}, \cdots, Q'_1 A'$ in Zeilenstufenform ist mit positiven Eckeinträgen bis mindestens zur vorletzten Zeile und mit $r' \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Insgesamt ist dann

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_{r'} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_1 \end{bmatrix} Q_{\nu_1} \cdots Q_1}_{r \text{ Faktoren}} \cdot A$$

wie behauptet und $r = \nu_1 + r' \leq n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$ $\square$

Bemerkung: Ein stärkeres Ergebnis erhält man für Spiegelungen mit Householder-Matrizen, siehe Aufgabe (5). Man braucht höchstens n solcher Matrizen.

Eine Anwendung: Zu lösen sei ein lineares Gleichungssystem "$Ax = b$" mit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Aus LA1 wissen wir

$$\mathsf{Lös}\,(A,b) = \varnothing \Leftrightarrow b \notin SR(A)$$

und wenn $b \in SR(A)$, dann gilt:

$$\mathsf{Lös}\,(A,b) = v + \underbrace{\mathsf{Kern}\, L_A}_{=\mathsf{Lös}\,(A,0)} \quad \text{für alle } v \in \mathsf{Lös}\,(A,b)$$

Wir versehen $\mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbb{R}^{m\times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt. Eine verallgemeinerte Aufgabe ist dann:

Suche den kürzesten Vektor $v^* \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ so, dass zugleich $Av^* - b$ am kürzesten ist unter allen Vektoren $Av - b$, $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Es besteht ein direkter Zusammenhang zur sogenannten Ausgleichsrechnung (siehe verteilter Text ($m = 2$, Rang $A = 2$) aus Mackens/Voß: Mathematik I, Lehrbuch für Studierende der Ingenieurwissenschaften, HECO, 1993; S. 219 ff.) Die Anwendung von Satz 17 ermöglicht Transformation: "$Ax = b$"$\to$ "$PAx = Pb$" mit längentreuem L_P und PA in Zeilenstufenform.

Rechen-Beispiel 18: $A = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 4 & * & * \\ 3 & * & * \end{bmatrix} \quad : \quad Q_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D\left(1, 2; \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} \sqrt{17} & \\ 0 & * \\ 3 & \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{26}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}, \quad Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} \sqrt{26} & \\ 0 & * \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Beachte: Die 1 in A verleitet, mit elementaren Umformungen zu arbeiten, diese sind aber nicht alle orthogonal/längentreu, insbesondere nicht die von Typ 2: $Q_j^i(\lambda)$.

Als Folgerung erhalten wir:

Satz 19: (a) Sei $A \in S\mathcal{O}(n)$. Dann ist $A = D_1 \cdots D_r$ mit elementaren Drehung(smatriz)en $D_1, \ldots, D_r$ und $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

(b) Sei $A \in \mathcal{O}(n) \backslash S\mathcal{O}(n)$: Dann ist: $A = S_1 \cdots S_r$ mit el. Spiegelung(s matriz)en $S_1, \ldots, S_r$ und $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1$ und r ungerade.
Es ist aber auch:
$A = D_1 \cdots D_r \cdot S(1, n; 1, 0)$ mit elementaren Drehungsmatrizen, $D_1, \ldots, D_r$ und $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Beweis: Nach Satz 17 ist mit geeigneten elementaren orthogonalen Matrizen $Q_1, \ldots, Q_r$: $B := Q_r \cdots Q_1 A$ in Zeilenstufenform mit positiven Eckeneinträgen bis zur vorletzten Zeile. A ist in (a) und (b) orthogonal also auch B. Insbesondere ist B invertierbar, also obere Dreiecksmatrix mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen. und - da orthogonal - eine Diagonalmatrix. Nur der letzte Diagonaleintrag ist u. U. nicht positiv, also ist: $B = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

(a) Jetzt ist $\mathsf{det}\, A = 1$. wir wählen die Q_i als el. Drehungen, dann ist $\mathsf{det}\, Q_1 = 1$, für $1 \leq i \leq r$ und $\mathsf{det}\, B = 1, \varepsilon = 1$ also: $B = E_n$ und $A = Q_1^{-1} \dots Q_r^{-1}$. Nach Beobachtung 16 sind auch die Q_i^{-1} elementare Drehungen. Der Rest der Behauptung folgt nun mit Satz 17.

(b) Jetzt ist $\varepsilon = -1,\ B = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1) = S(1, n; 1, 0)$. Die Behauptungen ergeben sich jetzt analog zu (a). □

Bemerkungen:

(a) Die zu den Drehungen in (a) gehörenden Drehwinkel heißen **"Eulersche Winkel" von $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{L_A}$.** Allerdings muss dann ein ganz bestimmtes Trigonalisierungsvorgehen bei Satz 17 festgelegt werden, damit Eindeutigkeit besteht.

(b) Der Fall $n = 3$ ist ein Sonderfall: denn nur hier ist $\frac{n(n-1)}{2} = n$. Man überlege sich, dass im Fall $n = 3$ bei (a) stets $r \leq 2$ ausreicht!

(c) Anwendungen der Eulerschen Winkel: u. A. in Mechanik/Robotik.

(d) Literatur: F. Neiß, Determinanten und Matrizen, Springer, verschiedene Auflagen. Vilenkin: Special Functions and Group Representations, AMS, 1968 (Übersetzung aus dem russischen.) S. 438 Theorem 1.

Nun zu Frage (I) vor Satz 15

"Block-Diagonalisierung durch orthogonalen Basiswechsel" (kurz: "orthogonale Diagonalisierung")

Definition 20: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **normal,** wenn ${}^{\mathsf{t}}AA = A{}^{\mathsf{t}}A$. (vgl. [F] S. 344)

Beispiele:

(a) Symmetrische Matrizen, orthogonale Matrizen, schiefsymmetrische Matrizen

(b) $n = 2 : A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ normal, dann ist $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \varepsilon_2 b & \varepsilon_1 a \end{bmatrix}$ mit $\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \{1, -1\}$ **und** $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ (siehe Satz 21 und Beweis).

Satz 21: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, dann gibt es $P \in \mathcal{O}(n)$ derart, dass

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_r) \end{array}\right]$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \sigma(A)$ und normalen 2×2-Matrizen $B_1, \dots, B_r$ ohne reelle Eigenwerte. Letztere haben die Form $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ mit $b \neq 0$.

Dabei ist $s = 0$, falls $\sigma(A) = \varnothing$ und $r = 0$, falls A diagonalisierbar ist.

Sonderfälle: "symmetrisch" und "orthogonal" s. u. Satz 22.

Beweis: Induktion nach n: $\boldsymbol{n = 1}$ **:** wähle $P = 1$.

$\boldsymbol{n \geq 1}$ **:** Die Behauptung gelte für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei jetzt $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$.

Fall 1: $\boldsymbol{\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \varnothing}$: Sei v_1 Eigenvektor zu einem $\lambda \in \sigma(A)$ und $||v_1|| = 1$. Es gilt $Av_1 = \lambda v_1$ und daher auch

$$\begin{aligned} 0 = ||(A - \lambda E_{n+1})v_1||^2 &= {}^{\mathsf{t}}v_1{}^{\mathsf{t}}(A - \lambda E_{n+1})(A - \lambda E_{n+1})v_1 \\ &= {}^{\mathsf{t}}v_1({}^{\mathsf{t}}AA - \lambda(A + {}^{\mathsf{t}}A) + \lambda^2 E_{n+1})v_1 \\ &= {}^{\mathsf{t}}v_1(A - \lambda E_{n+1}){}^{\mathsf{t}}(A - \lambda E_{n+1})v_1 \\ &= ||({}^{\mathsf{t}}A - \lambda E_{n+1})v_1||^2 \end{aligned}$$

Es folgt: v_1 ist auch Eigenvektor von ${}^tA$ zum Eigenwert λ.

Ergänze nun v_1 zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ und setze $P_1 = [v_1, \ldots, v_{n+1}]$. Dann gilt:

$$P_1^{-1} = {}^tP_1 \text{ und } {}^tP_1AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda & u \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Auch $P^{-1}AP$ ist normal. Daher muss $u = 0$ sein und auch A_1 ist normal. und somit auch A_1. Mit Hilfe der Induktionsannahme ergibt sich nun die Behauptung für $n+1$.

Fall 2: $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$. $n+1$ ist dann gerade!

$\underline{n+1 = 2:}$ Sei etwa $A : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A ist normal, also gilt

$$^{\mathsf{t}}AA = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = A \cdot {}^{\mathsf{t}}A$$

Es folgt: $b^2 = c^2$ und $(a-d)(b-c) = 0$. Wenn $b = c$: dann ist A symmetrisch und hat $\lambda = \frac{1}{2}\left(a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}\right)$ als reellen Eigenwert. W! Also ist $b = -c$ und $a = d$ und entsprechend $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Da $\sigma_A = \varnothing$ sein soll, ist $b \neq 0$. (A hat die komplexen Eigenwerte $a \pm ib$.)

$\underline{n+1 \geq 4:}$ <u>Vorbemerkung:</u> χ_A hat stets Nullstellen in $\mathbb{C}$ (siehe 10.22). Da $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$, ist mit λ stets auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle von χ_A. Sei $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(A)$ und $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ ein Eigenvektor. $\overline{v}$ ist dann Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Seien $v_1 = \frac{1}{2}(v + \overline{v})$ und $v_2 = \frac{i}{2}(v - \overline{v})$, dann sind v_1, v_2 reelle Vektoren. Andersherum ist $\overline{v} = v_1 + iv_2$ und $v = v_1 - iv_2$. Sei $W := < v_1, v_2 >_{\mathbb{R}}$. Dann gilt: (i) $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ (ii) $AW \subseteq W$ (iii) $^{\mathsf{t}}AW \subseteq W$

Beweis:

(i) Nach Voraussetzung ist $\lambda \neq \overline{\lambda}$, also ist das Paar der Eigenvektoren $(v, \overline{v})$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig. Da $< v, \overline{v} >_{\mathbb{C}} = < v_1, v_2 >_{\mathbb{C}}$, folgt (v_1, v_2) ist $\mathbb{C}$-linear unabhängig und umsomehr $\mathbb{R}$-linear unabhängig.

(ii) $$\begin{aligned} Av_1 &= A(\tfrac{1}{2}v + \overline{v}) = \tfrac{1}{2}(\lambda v + \overline{\lambda}\overline{v}) = \tfrac{1}{2}((\lambda_1 + i\lambda_2)v + (\lambda_1 - i\lambda_2)\overline{v}) \\ &= \tfrac{1}{2}\lambda_1(v + \overline{v}) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 i(v - \overline{v}) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W, \end{aligned}$$
analog für Av_2.

(iii) Es genügt zu zeigen, dass $v, \overline{v}$ auch $\mathbb{C}$-Eigenvektoren von $^{\mathsf{t}}A$ sind. Dies geht mit demselben Trick, wie im Fall 1, allerdings jetzt komplex gerechnet:

Zu $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ist dann $||x|| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\overline{x_i}x_i}_{\text{reell}}$ reell $= {}^{\mathsf{t}}\overline{x}x$

In unserem Fall ist:

$$\begin{aligned} 0 &= ||(A - \lambda E_{n+1})v|| = {}^{\mathsf{t}}\overline{v}\,{}^{\mathsf{t}}(A - \overline{\lambda}E_{n+1})(A - \lambda E_{n+1})v \\ &= {}^{\mathsf{t}}\overline{v}(A - \lambda E_{n+1}){}^{\mathsf{t}}(A - \overline{\lambda}E_{n+1})v \\ &= ||({}^{\mathsf{t}}A - \overline{\lambda}E_{n+1})v|| \ . \end{aligned}$$

Analog für $\overline{v}$.Da $^{\mathsf{t}}A$ auch reell ist folgt $^{\mathsf{t}}AW \subseteq W$.

Berechne nun eine Orthonormalbasis (w_1, w_2) von W und ergänze sie zu einer Orthonormalbasis $(w_1, \ldots w_{n+1})$ von $\mathbb{R}^{n+1}$. Setze $P = [w_1, \ldots, w_{n+1}]$ und erhalte:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \text{ mit } P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P.$$

Auch $P^{-1}AP$ ist normal und somit auch A_1. Mit der Indunktionsannahme für A_1 ergibt sich jetzt die Behauptung für A. □

Sonderfälle von Satz 21:

Wenn $\boldsymbol{A \in \mathcal{O}(n)}$, dann sind die B_i, falls sie vorkommen, alle orthogonal und ohne Eigenwerte. Die B_i sind daher Drehungsmatrizen mit Drehwinkel $\neq 0, \pi$.

Wenn A symmetrisch ist, dann kommen keine B_i vor ($r = 0$) denn die B_i müssten dann symmetrisch sein und symmetrische 2×2-Matrizen haben stets einen Eigenwert.

Man erhält:

Satz 22: Spektralsatz. Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar. Insbesondere gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, und es ist: $\boldsymbol{\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \sigma_{\mathbb{R}}(A)}$.

Beispiel 23: Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. A ist schiefsymmetrisch. Man berechnet der Reihe nach:

$$\sigma(A) = \{0\}, \;\; \mathsf{Eig}\,(A,0) = \mathsf{Kern}\, L_A =< \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} >_{\mathbb{R}} =< \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Länge}1 \\ =: v_1}} >_{\mathbb{R}},$$

$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ und $P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right]$. Der Block $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ entspricht einer (winkeltreuen aber nicht orthogonalen) Drehstreckung.

Beispiel 24: Sei $A := \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{125} & \frac{116}{125} \\ -\frac{12}{25} & \frac{109}{125} & \frac{12}{125} \\ \frac{4}{5} & \frac{12}{25} & -\frac{9}{25} \end{bmatrix}$. Man rechnet nach, dass gilt:

$A = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3$ mit den elementaren orthogonalen Matrizen,

$$Q_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}, \quad Q_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

A hat den Eigenwert -1 mit normiertem Eigenvektor $w_1 := \left[\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{9}{11}\right]$.

A hat das konjungiert komplexe Eigenwertpaar $\frac{117}{125} + \frac{i44}{125}, \frac{117}{125} - \frac{i44}{125}$.

Der dazugehörende A-invariante reelle Untervektorraum W hat als orthonormale Basis:

$$w_2 := \left[-\frac{4\sqrt{13}}{143}, \frac{3\sqrt{13}}{11}, \frac{6\sqrt{13}}{143}\right], \; w_3 := \left[\frac{3\sqrt{13}}{13}, 0, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right].$$

Die Matrix P mit w_1, w_2, w_3 als Spalten führt nun zu

$$P^{(-1)}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{117}{125} & \frac{-44}{125} \\ 0 & \frac{44}{125} & \frac{117}{125} \end{bmatrix}.$$

Bemerkung:
Dieses Beispiel ist natürlich extra so konstruiert, dass "schöne" Zahlen vorkommen. Dies ist aber untypisch, da normalerweise die komplexen Eigenwerte nur näherungsweise berechnet werden können und auch die notwendigen Normierungen (Wurzelberechnungen) zwangsläufig zu "unschönen" Zahlen führen.

Beispiel 25: $\boxed{\text{Sonderfall } n = 3 \text{ (allg.)}}$, $A \in \mathcal{O}(3)$. χ_A hat Grad 3 und somit stets mindestens eine reelle Nullstelle $\lambda \in \{1, -1\}$. Wie im Bewies von Satz 21, Fall 1 erhält man dann mit einem $P \in \mathcal{O}(3)$:

$$D := P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{array}\right] \qquad \underbrace{}_{A'}$$

Da auch $D \in \mathcal{O}(3)$ ist $A' \in \mathcal{O}(2)$ also (siehe Beispiel 11(b)) $a = d,\ c = -b$ und $a^2 + b^2 = 1$ oder $a = -d,\ b = c$ und $a^2 + b^2 = 1$.

Mehr Details zu $\boldsymbol{n = 3}$ bei [F] S. 306 / 307 → "Satz v. Fußball"

Bemerkung 26: (a) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal diagonalisierbar ist, dann ist A normal.

(b) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ P \in \mathcal{O}(n),\ B := {}^tPAP$. Hat B die Gestalt aus Satz 21 (mit normalen B_i), dann ist A normal.

Zusammenfassung §12:

- Metrische lineare Abbildungen
- Isometrien, Standardfall: $\mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ mit Standardskalarprodukt
- $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(2)$ und geometrische Interpretation
- elementaren orthogonalen Matrizen (sogenannte "Givens"-Drehungen im D-Fall)
- Matrixdarstellungen von Isometrien
- Zeilenstufenform durch elementare orthogonale Zeilenumformungen
- Anwendung: Ausgleichsrechnung
- Erzeugung von $\mathcal{O}(n)$, $S\mathcal{O}(n)$ durch elementare orthogonale Matrizen. (Satz 19)
- Eulersche Winkel
- "orthogonale Diagonalisierbarkeit" normaler Matrizen (Satz 21)
- Spezialfall: symmetrische Matrizen

offen bleibt u. A. "orthogonale Äquivalenz" SVD folgt in §13.