§14 (Symmetrische) Bilinearformen und Quadriken

Motivation: Geometrie, CAD, NW, Verallgemeinerung des Begriffs Skalarprodukt.

Wiederholung: Bilinearformen, symmetrische Bilinearformen, positiv definiertes Skalarprodukt.

Wir konzentrieren uns auf reelle Vektorräume.

Sei im Folgenden stets V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

Definition 1: Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. $M_{\mathcal{A}}(s) := (s(v_i,\ v_j))_{1 \le i,j \le n}$ heißt Gram'sche Matrix von s. (vgl. [F], S. 289 ff.)

Mit Hilfe von $M_{\mathcal{A}}(s)$ kann die Berechnung von $s(v, w)$ über Koordinaten erfolgen: Sei $v = \Phi_{\mathcal{A}}(x)$, $w = \Phi_{\mathcal{A}}(y)$, dann ist

$$\boxed{s(v, w) = {}^{\mathsf{t}}x M_{\mathcal{A}}(s)\, y.}$$

Fragen: Abhängigkeit von $\mathcal{A}$, Ablesen von Eigenschaften von s an M_s, Beschreibung der "Flächen" $\{v : s(v, v) = \text{const}\ \}$.

Beobachtung 2: s symmetrische Bilinearform $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{A}}(s)$ symmetrische Matrix. □

Die Symmetrie von s lässt sich demnach bezüglich jeder Basis an $M_{\mathcal{A}}(s)$ erkennen.

Satz 3: Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V. Sei $P := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V) = (p_{ik})$ und damit für $i \le i \le n :\ v_i = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ki}\, w_k$. Dann ist

$$M_{\mathcal{A}}(s) = {}^{\mathsf{t}}P M_{\mathcal{B}}(s) P$$

Beweis: Seien $A := M_{\mathcal{A}}(s)$, $B := M_{\mathcal{B}}(s)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Nach Definition 1 ist dann $a_{ij} = s(v_i,\ v_j)$, $b_{ij} = s(w_i, w_j)$ für $1 \le i,\ j \le n$ und man berechnet:

$$a_{ij} = s\Big(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} w_k, v_j\Big) = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} s(w_k, v_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ki} s(w_k, w_l) p_{l_j} = ({}^{\mathsf{t}}PBP)_{ij}$$ □

Beachte: i. A. ist **nicht** ${}^{\mathsf{t}}P = P^{-1}$. Dies ist nur der Fall, wenn $P \in \mathcal{O}(n)$.

Definition 4: Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A, B heißen kongruent ($A \equiv B$), wenn mit $P \in GL(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$A = {}^{\mathsf{t}}PBP$$

$\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 5: **(a)** Seien $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und für $x, y \in \mathbb{R}^{3\times 1} : s_A(x, y) := {}^{\mathsf{t}}xAy$. Offensichtlich ist s genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist. Dies ergibt sich auch direkt aus Beobachtung 2, denn mit der kanonischen Basis $\mathcal{K}$ ist $M_{\mathcal{K}}(s_A) = A$. Wann ist s_A ein Skalarprodukt bzw. s positiv definit? Dazu ergeben sich im Verlauf dieses Paragraphen Kriterien. s_A ist die durch die Matrix A und bzgl. der kanonischen Basis induzierte **Standardbilinearform.**

(b) Auf dem reellen Vektorraum $C_1([a, b])$, wird durch die Festlegung $s(f, g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$ für $f, g \in C_1([A, B])$ ein Skalarprodukt erklärt (Wdhlg). Sei $V = < \underbrace{1, f, \dots, f^{n-1}}_{\mathcal{A}\ \text{Basis}} >_{\mathbb{R}}$, mit $f = id_{[a,b]}$. Wie äußert sich hier die Positiv-Definitheit von s in der Matrix $M_{\mathcal{A}}(s)$? Empfehlung: $M_{\mathcal{A}}(s)$ (z. B. für $n = 3$) ausrechnen.

Wir interessieren uns besonders für die einer Bilinearform zugeordnete quadratische Form

$$q_s : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto s(v, v).$$

Den Zusammenhang zwischen s und q_s beschreibt die folgende

Beobachtung 6: Sei s eine Bilinearform auf V.

(a) Sei $s^* : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilinearform mit $s^*(v,w) = s(w,v)$ für $v, w_i \in V$. Dann gilt

$$s = \frac{1}{2}\underbrace{(s+s^*)}_{s^+} + \frac{1}{2}\underbrace{(s-s^*)}_{s^-}$$

Dabei ist s^+ symmetrisch und s^- schiefsymmetrisch. Letzteres besagt: $s^-(v,w) = -s^-(w,v)$ für alle $v, w \in V$.

(b) $q_s = q_{s^+}$ und für alle $v, w \in V$ gilt: $s^+(v,w) = \frac{1}{2}(q_s(v+w) - q_s(v) - q_s(w))$

Beweis: Nachrechnen (vgl. [F] S. 291) □

Wir konzentrieren uns auf symmetrische Bilinearformen, u. A. da wir insbesondere an quadratischen Flächen interessiert sind: "$\{v : q_s(v) = \text{const.}\}$". Dafür genügt es symmetrische Matrizen "modulo" Kongruenz zu betrachten (Satz 2).

Eine **Normalform für symmetrische Matrizen unter Kongruenz** ist leicht zu erreichen.

Satz 7: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}$ **symmetrisch,** $\exists P \in Gl(n,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} {}^{t}PAP &= \mathsf{diag}\Big(\underbrace{1,\dots,1}_{P}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{q}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-r}\Big) \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{E_p} & & \\ & \boxed{-E_q} & \\ & & \boxed{0} \end{bmatrix} = \mathsf{diag}(E_p, -E_q, 0) \end{aligned}$$

($p = 0$ und / oder $q = 0$ und / oder $v = 0$ erlaubt). Dabei ist r der Rang von A.

Beweis:

(a) Wir benutzen elementare Umformungen der Art $A \mapsto {}^{t}PAP$ mit Elementarmatrizen P. Dies genügt, denn $Gl(n,\mathbb{R})$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt. Im Einzelnen gilt:

(i) $${}^{t}P_k^1 A P_k^1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{kk}} & a_{k2} & \dots & a_{k,k+1} & a_{k1} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ a_{2k} & & & & a_{21} & & & \\ \vdots & & * & & \vdots & & * & \\ a_{k-1,k} & & & & a_{k-1,1} & & & \\ a_{nk} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & \boldsymbol{a_{11}} & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{k+1,k} & & & & a_{k+1,1} & & & \\ \vdots & & * & & \vdots & & * & \vdots \\ a_{n,k} & & & & a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dabei ist ${}^{t}P_k^1 = P_k^1 = P_1^k$. Alle Einträge in den mit $*$ gekennzeichneten Bereichen werden unverändert von A übernommen.
Die Diagonaleinträge können also vertauscht werden, außerdem könne so von 0 verschiedene Einträge in die erste Zeile und erste Spalte gebracht werden.

(ii) ${}^{t}Q_k^1(\lambda) A Q_k^1(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} + 2\lambda a_{1k} + \lambda^2 a_{kk} & * \\ * & * \end{bmatrix}$, dabei ist ${}^{t}Q_k^1(\lambda) = Q_1^k(\lambda)$.

Sollte $a_{11} = 0$ sein und a_{1k} oder $a_{kk} \neq 0$, dann kann so erreicht werden, dass die $(1,1)$-Position $\neq 0$ wird.

(iii) $^{\mathsf{t}}Q_1^k(\mu)AQ_1^k(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \boldsymbol{a_{1k}+\mu a_{11}} & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{k1}+\mu a_{11}} & \dots & * & * \\ * & & * & * \end{bmatrix}$

Wenn $a_{11} \neq 0$ kann - da ja $a_{k1} = a_{1k}$ - simultan in der ersten Zeile und der ersten Spalte ausgeräumt werden.

(b) Nun lässt sich A mit vollständiger Induktion wie folgt diagonalisieren:
$\boldsymbol{n=1:}$ $A = a$, wenn $a \neq 0$, dann ist $^{\mathsf{t}}PAP = \mathrm{sgn(a)}$ mit $P = \frac{1}{\sqrt{|a|}}$.
$\boldsymbol{n \geq 1:}$ Induktionsannahme: Für alle symmetrischen $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert ein $P \in GL(n,\mathbb{R})$, derart, dass $^{\mathsf{t}}PA'P$ eine Diagonalmatrix ist.
Sei nun $A \in R^{(n+1)\times(n+1)}$.
Wenn $\boldsymbol{A=0}$, wähle $P = E_{n+1}$.
Wenn $\boldsymbol{A\neq 0}$, dann sei etwa $a_{ik} = a_{ki} \neq 0$. Falls $i \neq 0$, kann durch die Umformung $A \mapsto {}^{\mathsf{t}}P_k^1AP_k^1$ erreicht werden, dass in der ersten Zeile ein Eintrag $\neq 0$ wird. Sei also o. E. $i = 1$, und gelte $a_{1k} = a_{k1} \neq 0$. Falls dann $k \neq 1$, dann kann durch die Umformung $A \mapsto {}^{\mathsf{t}}Q_k^1(\lambda)AQ_k^1(\lambda)$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass $a_{11} + 2\lambda a_{1k} + \lambda^2 a_{kk}^2 \neq 0$, erreicht werden das der $(1,1)$-Eintrag $\neq 0$ wird (siehe (ii)): Sei daher o. E. auch $k = 1$ und $a_{11} \neq 0$. Dann berechnet man

$$^{\mathsf{t}}Q_1^{n+1}(\mu_{n+1})\dots{}^{\mathsf{t}}Q_1^2(\mu_2)AQ_1^2(\mu_2)\dots Q_1^{n+1}(\mu_{n+1}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots \\ 0 & \multicolumn{2}{|c}{} \\ \vdots & \multicolumn{2}{|c}{A'} \end{bmatrix}$$

mit $\mu_k = -a_{1k}/a_{11}$ für $2 \leq k \leq n+1$. Die Induktionsannahme für A' führt jetzt zum Ziel.

(c) Sei nun $A = \mathsf{diag}(a_1,\dots,a_n)$. Durch Transformationen des Typs $A \mapsto {}^{\mathsf{t}}P_k^1AP_k^1$ können die Diagonaleinträge sortiert werden, derart, dass

$$\underbrace{a_1 > 0,\dots,a_p > 0}_{\substack{\text{falls ein } a_k>0,\\ \text{sonst } p=0}}\ \underbrace{a_{p+1} < 0,\dots,a_{p+q} < 0}_{\substack{\text{falls ein } a_k<0,\\ \text{sonst } q=0}},\ \underbrace{a_{p+q+1} = \dots = a_n = 0}_{\substack{\text{falls ein } a_k=0,\\ \text{sonst } p+q=n}}$$

Wenn nun $a_k \neq 0$, dann hat
$^{\mathsf{t}}S_k\left(\frac{1}{\sqrt{|a_k|}}\right)\mathsf{diag}(a_1,\dots,a_n)S_k\left(\frac{1}{\sqrt{|a_k|}}\right)$ den Eintrag $\frac{a_k}{|a_k|}$statt a_k □

Beispiel 8: Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Wir berechnen:

$$A \equiv\!\!\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \equiv\!\!\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \equiv\!\!\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \equiv\!\!\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ □

Beobachtung 9: Da die Werte einer Bilinearform 's' auf einen endlich dimenisonalen $\mathbb{R}$-Vektorraum bei gegebener Basis $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von $M_{\mathfrak{A}}(s)$ berechnet werden können und wegen Satz 3 und Satz 7, gibt es, wenn s symmetrisch ist, eine Basis $\mathfrak{A}$ von V derart, dass

$$M_{\mathfrak{A}}(s) = \mathsf{diag}(E_p, -E_q, Q_{n-r}) =: \Lambda$$

und es ist dann

$$\boxed{s(\Phi_{\mathfrak{A}}(x), \Phi_{\mathfrak{A}}(y)) = {}^{\mathsf{t}}x\Lambda y = \sum_{i=1}^{p} x_iy_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_iy_i = s_\Lambda(x,y)}$$

und $q_s(\Phi_{\mathfrak{A}}(x)) = {}^{\mathsf{t}}x\Lambda x = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$

Satz 10: Sylvester'scher Trägheitssatz (James Joseph Sylvester, 1814 - 1897 klassische Version, Sylvester 1852) zitiert nach McDuffee, The Theory of Matrices (Chelsea, ohne Jahresangabe)

$$\boxed{\text{Die Diagonalmatrix in Satz 7 ist eindeutig durch } A \text{ bestimmt.}}$$

Damit ist folgendes gemeint: Wenn

$$\begin{aligned} A &\equiv \mathsf{diag}(E_p, -E_q, 0_{n-r}) =: \Lambda \quad \textbf{und} \\ A &\equiv \mathsf{diag}(E_{p'}, -E_{q'}, 0_{n-r'}) =: \Lambda' \ , \end{aligned}$$

dann ist $p = p',\ q = q'$ und dann automatisch $r = r'$.

Beweis: Wenn $A \equiv \Lambda$ und $A \equiv \Lambda'$, dann folgt $\Lambda \equiv \Lambda'$ gelte mit $P \in GL(n, \mathbb{R}) : {}^{\mathsf{t}}P\Lambda P = \Lambda'$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$: $\underbrace{{}^{\mathsf{t}}x{}^{\mathsf{t}}P}_{={}^{\mathsf{t}}y} \Lambda \underbrace{Px}_{=:y} = {}^{\mathsf{t}}x\Lambda' x$ bzw.

$$\sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2 = \sum_{i=1}^{p'} x_i^2 - \sum_{i=p'+1}^{p'+q'} x_i^2 \qquad (*)$$

Beachte: $p + q = p' + q' =$ Rang A liegt fest.

Annahme $p < p'$: Es gibt $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ derart, dass $x_{p'+1} = \ldots = x_n = 0$ (falls $p' < n$) **und $x \neq 0$**

und $\underbrace{\begin{bmatrix} P_{1\bullet} \\ \vdots \\ P_{p\bullet} \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{p\times n}} x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = 0,$ **denn** $p < p'$!

In $(*)$ folgt damit

$$-\sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2 = \sum_{r=1}^{p'} x_i^2 > 0 \ \ , W!$$

Aus "Symmetriegründen" folgt $p = p'$ und dann $q = q'$. □

Definition 11: Sei $A \in \mathbb{R}^{n+n}$ symmetrisch. Die nach Satz 10 und eindeutig bestimmten Zahlen p, q heißen **Trägheitsindizies** von A bzw. von s_A. Die **Signatur von A bzw. von s_A** ist $\sigma = p - q$.

Bemerkungen:

(a) Die Paare $(\sigma, \mathsf{Rang}\,A)$ und (p, q) bestimmen sich gegenseitig (bei gegebenen n.) Es ist $\mathsf{Rang}\,A = p + q$ und $\sigma = p - q$.

(b) Häufig werden die Trägheitsindizies auch anders definiert. Unsere Definition folgt dem Buch Gantmacher: Matrizenrechnung, Springer, 1986. In dem bereits in §12 zitierten Buch von Mackens und Voß wird anders vorgegangen.

(c) Zur Bestimmung von p, q genügt es $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ zu bestimmen, derart, dass ${}^{\mathsf{t}}PAP$ Diagonalmatrix ist und dann die positiven Einträge abzuzählen, denn nach Normieren der Beträge der Diagonalmatrix und nach Umsortieren entsteht die Form in Satz 7.

Als Folgerung eine moderne Form des Trägheitssatzes: (vgl. [F] S. 322)

Satz 12: Sei $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, V endlichdimensional und sei

$\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, derart, dass

$$\begin{array}{rcll} s(v_i, v_i) & > & 0 & \text{für } i \leq i \leq p, \\ s(v_i, v_i) & < & 0 & \text{für } p+1 \leq i \leq p+q, \\ s(v_i, v_i) & = & 0 & \text{für } p+q+1 \leq i \leq n. \end{array}$$

Dabei ist $p = 0, q = 0$ und $p + q = n$ erlaubt.

Dann sind (p, q) die Trägheitsindizies von $M_{\mathfrak{A}}(s)$ und durch s eindeutig festgelegt.

Beweis: Sätze 3, 7, 10 □

Bemerkung 13: Sei in Satz 11:

$V_0 =< p_{p+1+1}, \ldots, v_n >_{\mathbb{R}}, \; V^+ =< v_1, \ldots, v_p >_{\mathbb{R}}, \; V^- =< v_{p+1}, \ldots, v_{p+q} >$

dann gilt: $V_0 \oplus V^+ \oplus V^-$. Mit anderen Worten: es gilt: $V = V_0 + V^+ + V^-$ und $V_0 \cap (V^+ + V^-) = \{0\} = V^+ \cap (V_0 + V^-) = V^- \cap (V_0 + V^+)$.

und alle weiteren Eigenschaften bei [F] S. 322 sind erfüllt.

Bemerkung 14: Wir wissen aus Satz 12.22, dass es zu einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein $P \in \mathcal{O}(n)$ gibt, derart, dass ${}^tPAP$ eine Diagonalmatrix ist. Verfügt man über dieses P, so braucht nur noch normiert zu werden, um die Form aus Satz 7 zu erhalten. **Aber:** solch ein P ist i.A. schwer zu berechnen.

Ablesen der Positiv-Definitheit von s an $M_{\mathfrak{A}}(s)$, bezüglich einer beliebigen Basis $\mathfrak{A}$.

Beobachtung 15: Sei s symmetrische Bilinearform.

(a) s nicht ausgeartet $\Leftrightarrow \forall v \in V \backslash \{0\} \exists w \in V : s(v, w) \neq 0 \Leftrightarrow p + q = n$

(b) $[s$ positiv definit $\Leftrightarrow p = n]$ und $[s$ negativ definit $\Leftrightarrow q = n]$

Eine Bilinearform s ist dabei negativ definit, wenn $-s$ positiv definit ist. Wir nennen eine **symmetrische Matrix positiv bzw. negativ definit,** wenn die zugehörige Bilinearform $(x, y) \mapsto {}^txAy$ positiv bzw. negativ definit ist.

Beweis von Beobachtung 15: klar nach Beobachtung 9. □

Beispiel 16: (a) Seien $n = 2, V = \mathbb{R}^{2\times 1}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $s_A(x, y) = {}^txAy$ für $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dann ist $M_{\mathfrak{K}}(s_A) = A$. Hier berechnet man

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es folgt: $p = q = 1$. s_A bzw. A ist weder positiv, noch negativ definit.

(b) Gegeben sei die reelle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y +$ const. f sei zweimal stetig differenzierbar. Das folgende hinreichende Kriterium für die Existenz lokaler Extrema ist Spezialfall entsprechender Kriterien aus der Analysis (siehe z. B. die Bücher von Heuser oder Forster): Wenn an der Stelle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$f'(a, b) = 0 \text{ und } f''(a, b) \text{ positiv oder negativ definit}$$

dann liegt bei (a,b) ein Extremum von f vor. Man berechnet $f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2\alpha x + \beta y + \delta, \beta x + 2\gamma y + \varepsilon)$ und

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{bmatrix} .$$

Zusätzlich sei vorausgesetzt: $\Delta := 4\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$. Dann hat das lineare Gleichungssystem $f' = 0$ die Lösung

$$(a,b) = \frac{1}{\Delta}(-2\gamma\delta + \varepsilon\beta, 2\alpha\varepsilon - \delta\beta) .$$

Weiter berechnet man unter der Voraussetzung $\alpha \neq 0$:

$$f'' \equiv \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{2\alpha} \end{bmatrix} \equiv sgn(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & sgn(\Delta) \end{bmatrix} .$$

Mit Hilfe des Kriteriums erkennt man jetzt, dass bei (a,b) ein Extremum von f vorliegt, wenn $\Delta > 0$.

Bemerkung: Das Verfahren aus dem Beweis von Satz 7 ist i. A. das effizienteste, um die Trägheitsindizes zu ermitteln. Es genügt, Diagonalform zu erreichen, da durch die Normierung der Beträge der Diagonaleinträge die Vorzeichen nicht mehr geändert werden.

Weitere Methoden/Kriterien zur Entscheidung, ob eine symmetrische Matrix positiv definiert ist.

Orthogonale Basiswechsel $A \to {}^{t}PAP$ (siehe Bemerkung 14)

Abschätzung von $\frac{\| Ax \|}{\| x \|}$: Siehe dazu auch §12 (Matrixnormen, Rayleigh-Quotient)

Wenn für alle $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und mit einem $\alpha > 0$ gilt

$$\| Ax \| \leq \alpha \| x \|$$

dann ist A, bzw. s_A positiv definit.

Hauptminoren-Kriterium oder Hurwitz-Kriterium: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $A = (a_{ij})$. Dann gilt:

$$A \text{ positiv definit} \iff \text{für } 1 \leq k \leq n : \quad \det\left((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}\right) > 0.$$

Die dabei auftretenden Determinanten heißen Hauptminoren. Für einen Beweis wird auf Aufgabe (14) verwiesen. Für größere Matrixformate ist dieses Kriterium praktisch wegen des zu großen Rechenaufwandes nicht anwendbar.

Für das allgemeine **Hurwitz-Kriterium** (Ablesen der Signatur an obiger Determinatenfolge) sei auf Seite 398 Teil 2 des Lehrbuches der Algebra von G. Scheija und U. Stroch, Teubner 1980 verwiesen.

Quadriken und Hauptachsentransformation [1]

Definition 17: Ein Polynom(ausdruck) f oder $f(x)$ 2. Grades mit reellen Koeffizienten hat die Form $f(x) = \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$ mit $x = {}^{t}[x_1, \ldots, x_n]$.

Mit anderen Worten: $f(x) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ist ein Polynom mit höchstens quadratischen Termen. Dazu gehört immer eine Abbildung $f : \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R},\ v \mapsto f(v)$.

[1] orientiert an dem bereits mehrfach zitiertem Buch von Wolfgang Mackens und Heinrich Voß; Mathematik I für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Heco-Verlag, 1993, Seiten 301 und 303

Die in einem Polynom 2. Grades auftretenden Koeffizienten lassen sich zusammenfassen als

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, c \in \mathbb{R}.$$

Die Nullstellenmenge $N_f := \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : f(v) = 0\}$ heißt Fläche 2. Ordnung oder **Quadrik**. Folgende kompakte Schreibweise wird benutzt

$$\boxed{f(x) = {}^{\mathsf{t}}xAx + {}^{\mathsf{t}}bx + c} \tag{1}$$

Wenn $A = 0$, dann ist f linear und N_f ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Ab jetzt sei $A \neq 0$ vorausgesetzt.

Wenn A nicht symmetrisch ist, dann kann $A' := \frac{1}{2}(A + {}^{\mathsf{t}}A)$ gesetzt werden. Das entsprechende veränderte Polynom sei $f' = {}^{\mathsf{t}}xA'x + {}^{\mathsf{t}}bx + c$ und man stellt fest: $f' = f$. Im Folgenden kann also o. E. vorausgesetzt werden $\boldsymbol{A \neq 0}$ **und symmetrisch.**

Satz 18: Normalform für Polynome vom Grad 2
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $\neq 0$. Seien $b \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ c \in \mathbb{R}$ und f wie in (1), dann gibt es $P \in S\mathcal{O}(n),\ v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass mit $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gilt:

$$f(Py + v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + \alpha \qquad r \leq n$$

oder

$$f(Py + v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + \beta y_n \qquad r < n$$

Dabei ist $r = \mathsf{Rang}\, A,\ \beta > 0$, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind die von 0 verschiedenen, u. U. mehrfachen, Eigenwerte von A.

Beweis: Für einen vollständigen Beweis sei auf das Buch von Mackens und Voß verwiesen. Hier wird nur der relativ kurz und einfach beweisbare Fall behandelt, wo zusätzlich vorausgesetzt ist, dass $\boldsymbol{b \in \mathsf{Bild}\, L_A}$.

Nach Satz 12.22 gibt es eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von A. Mit

$P = [v_1, \ldots, v_n] \in S\mathcal{O}(n)(!)$ gilt dann ${}^{\mathsf{t}}PAP = \mathsf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: \Lambda$.

Nun ist

$$\begin{aligned} f(P_y + v) &= ({}^{\mathsf{t}}y{}^{\mathsf{t}}P + {}^{\mathsf{t}}v)A(Py + v) \\ &= {}^{\mathsf{t}}y\Lambda y + \underline{{}^{\mathsf{t}}y{}^{\mathsf{t}}PAv} + \underline{{}^{\mathsf{t}}vAPy} + {}^{\mathsf{t}}vAv + \underline{{}^{\mathsf{t}}bPy} + {}^{\mathsf{t}}bv + c \\ &= ty\Lambda y + \underbrace{{}^{\mathsf{t}}(2Av + b)Py}_{=0??} + \underbrace{{}^{\mathsf{t}}vAv + {}^{\mathsf{t}}bv + c}_{=:\lambda} \end{aligned}$$

wenn $b \in$ Bild L_A, also $\mathsf{Lös}\,(A, -\frac{1}{2}b) \neq \varnothing$, dann kann v so gewählt werden, dass $2Av + b = 0$. $\square$

Definition 19: Die Abbildung $F : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $F(y) = Py + v$ aus Satz 2 heißt **Hauptachsentransformation.** I. A. ist F eine sogenannte **Bewegung**, dies ist eine Hintereinanderausführung einer Translation und einer Isometrie. Die Bewegungen sind genau (zu beweisender Satz) die abstandstreuen Abbildungen. F heißt **abstandstreu,** wenn für alle $v, w \in V$ gilt: $\parallel v - w \parallel\ = \parallel F(v) - F(w) \parallel$. Die Hauptachsentransformationn fördert die geometrischen "optimalen" (wenig Koeffizienten $\neq 0$) Koordinatenachsen zu Tage.

Beispiel 20: (Mackens / Voß S. 299):

Sei $f = 8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 5$.

Hier ist $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -20 \\ -10 \end{bmatrix}$ und $c = 5$.

Man berechnet: $\chi_A = t^2 - 25t + 100 = (t-5)(t-20)$ und dann $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Probe: ${}^{\mathsf{t}}PAP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$. Hier ist $\mathsf{det}\, A \neq o$ und $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A, b) = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, bzw. $b \in \mathsf{Bild}\, L_A$. Setze nun wie im Beweis $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, dann erhält man:

$$f(Py + v) = 5y_1^2 + 20y_2^2 - 20 \quad .$$

Die Klassifizierung der Quadriken setzt nach der Hauptachsentransformation ein. Für die Fälle $n = 2, n = 3$ ist sie in dem Buch von Mackens und Voß vollständig durchgeführt mit Abbildungen typischer Fälle. Siehe dort auf den Seiten 304 - 306. Z. B. mit Hilfe von Maple kann man sich Quadriken für $n = 3$ mit der Anweisung

$$\mathsf{plots[implicitplot]}\big(f(x,y,z), x = \alpha \ldots \beta, y = \gamma \ldots \delta,\ z = \kappa \ldots \lambda,\ \text{Optionen}\big).$$

Die Untersuchung von Quadriken ist Teil der sogenannten "analytischen Geometrie". Zur Hauptachsentransformation im Rahmen der analytischen Geometrie siehe: Fischer, Analytische Geometrie, Vieweg. Dort wir u.A. eine schöne historische Einführung gegeben und ein tieferes Verständnis der Quadriken im Rahmen der projektiven Geometrie ermöglicht.

Quadriken sind "trotz alledem" recht einfach gebaute Flächen. Komplexere algebraische definierbare Flächen werden in der **allgebraischen Geometrie** untersucht. Ein paar Beispiele zum Anschauen finden Sie unter

www.mathematik.uni-kl.de/~keilen/Flaechen.html

Faszinierend finde ich z. B. die sogenannte Barth-Dezik, die Nullstellenmenge eines Polynoms in 3 Variablen vom Grad 10.