Lösung zu Aufgabe (14):

(a) Induktion nach n. Für $n=1$ ist die Aussage offensichtlich korrekt. Seien nun $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ symmetrisch und alle $d_i \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $d_n \neq 0$ und somit A_n invertierbar. Ich setze nach Anleitung $P = \begin{bmatrix} E_n & -A_n^{-1} w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dabei entstammt w aus der Aufteilung $A = \begin{bmatrix} A_n & w \\ {}^t w & \alpha \end{bmatrix}$ von A. Dann berechne ich (nach Anleitung und mit der Beziehung ${}^t A_n^{-1} A_n = E_n$):

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -{}^t w\, {}^t A_n^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & w \\ {}^t w & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n & -A_n^{-1} w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ mit } \beta = \alpha - {}^t w\, {}^t A_n^{-1} w$$

und $d_{n+1} = \det A \underset{\det P = 1}{=} \det({}^tPAP) = \det A_n \cdot \beta = d_n \cdot \beta$. Es folgt: $\beta = \frac{d_{n+1}}{d_n}$.

Für A_n gibt es (Induktionsannahme) eine Matrix $P_n \in GL(n, \mathbb{R})$ so, dass (i) und (ii) gelten. Für A ergibt sich dann:

$$\begin{bmatrix} {}^tP_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^tP\,A\,P \begin{bmatrix} P_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tP_n A_n P & 0 \\ 0 & \frac{d_{n+1}}{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & d_n/d_{n-1} & \vdots \\ 0 & \cdots & & d_{n+1}/d_n \end{bmatrix}$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, d.h. die zugehörige Bilinearform ist positiv definit.

Dann ist aber auch A_k positiv definit, denn für $x \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ gilt:

$${}^tx A_k x = [{}^tx, 0]\, A \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{und} \quad = 0 \text{ nur wenn } x = 0.$$

Daher ist $d_k \neq 0$ für $1 \le k \le n$ und nach (a) ist $A \equiv D := \operatorname{diag}(d_1, d_2/d_1, \dots, d_n/d_{n-1})$.

A ist genau dann positiv definit, wenn D positiv definit ist (14.1 – 14.3).

Wenn D positiv definit ist, muss aber ${}^te_i D e_i = d_i/d_{i-1} > 0$ sein für $1 \le i \le n$ ($d_0 := 1$).

Dies wiederum ist nur möglich, wenn $d_i > 0$ für $1 \le i \le n$.

Sei $d_i > 0$ für $1 \le i \le n$. $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2/d_1, \dots, d_n/d_{n-1})$ ist nach (a) kongruent zu A. Mit ${}^tx = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ berechnet man

$${}^tx D x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{d_i}{d_{i-1}}}_{>0} x_i^2 \qquad (d_0 := 1)$$

Die zu D gehörende Bilinearform ist demnach positiv definit und daher auch die zu D kongruente Matrix A. $\square$