Lösung zu (7)

(a) Seien $w, w' \in W$. Es gilt jedenfalls $P_Y(w+w') = P_Y(w) + P_Y(w')$

Seien $v, v' \in V$ Urbilder von $P_Y(w), P_Y(w')$ unter F.

Es gilt also $F(v) = P_Y(w)$ und $F(v') = P_Y(w')$ und

natürlich dann auch $F(v+v') = P_Y(w+w')$.

Nach Definition ist nun

$$F^{\#}(w+w') = F^{\#}\big(P_Y(w+w')\big) = P_{X^\perp}(v+v')$$

$$F^{\#}(w) = F^{\#}\big(P_Y(w)\big) = P_{X^\perp}(v)$$

$$F^{\#}(w') = F^{\#}\big(P_Y(w')\big) = P_{X^\perp}(v')$$

Da $P_{X^\perp}$ linear ist, folgt $F^{\#}(w+w') = F^{\#}(w) + F^{\#}(w')$.

Analog zeigt man für $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W$: $F^{\#}(\lambda w) = \lambda F^{\#}(w)$.

(b) Durch elementare Spaltenumformungen ermittelt man

$$Y = \text{Bild}\, L_A = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

und (z.B. mit Gram-Schmidt durchführen)

$$Y = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{u_1} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

mit der orthogonalen Basis (u_1, u_2)

Ebenfalls mit elementaren Umformungen ermittelt man

$$X = \text{Kern}\, L_A = \text{Lös}(A, 0) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x} \right\rangle_{\mathbb{R}},$$

trivialerweise ist (x) eine OB.

Nun können der Reihe nach die Spalten

$$F^{\#}(e_1), \dots, F^{\#}(e_4)$$

der Matrix $A^{\#}$ berechnet werden.

$F^{\#}(e_1)$: $P_Y(e_1) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\-2\end{bmatrix} =: y_1$

Bei der Bestimmung von $X = \text{Lös}(A,0)$ kann man bereits $P = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{bmatrix}$

ermitteln so, dass gilt: $PA = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

und außerdem $Q = \begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ so, dass gilt: $PAQ = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Damit findet man $v_1 \in V$ mit $F(v_1) = y_1$ wie folgt:

Suche irgendeine Lösung von $PAQz = Py_1$ bzw. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} z = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$

etwa $z = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}$ und dann $v_1 = Qz = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}$

Probe: $F(v_1) = Av_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\-2\end{bmatrix}$ ✓ $y_1 - e_1 \perp Y$ ✓

Damit ist $P_{X^\perp}(v_1) = v_1 - P_X(v_1) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\,\frac{-5}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$

Probe: $X \perp P_{X^\perp}(v_1)$ ✓

$F(P_{X^\perp}(v_1)) = A\cdot\frac{1}{30}\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix}18\\6\\6\\-12\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\-2\end{bmatrix} = y_1$ ✓