Ein Beispiel zur Rechts- und Linksdivision bei Polynommatrizen:

Sei $M := \begin{bmatrix} x+1 & x^4+x+1 \\ x^3+x & x^5+x^4+1 \end{bmatrix}$ **eine Polynommatrix mit Koeffizienten aus Z_2**

Im Beispiel ist:

$$\textit{Grad von } M = 5, \quad \textit{und } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^5$$

Division der Matrix M von rechts durch L: $L := \begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & x^2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 \quad dL := 2$

1. Schritt: $M1 := M0 - \left(x^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \&^* L \right) \quad M1 := \begin{bmatrix} x+1 & x^4+x+1 \\ x & x^4+1 \end{bmatrix}$

$$M1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^5$$

2. Schritt: $M2 := M1 - \left(x^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \&^* L \right) \quad M2 := \begin{bmatrix} x+1+x^2 & x+1 \\ x+x^2 & 1 \end{bmatrix}$

$$M2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^4$$

3. Schritt: $M3 := M2 - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \&^* L \right) \quad M3 := \begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} \qquad M3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^2$

Nun kann aus Gradgründen nicht mehr weiter reduziert werden.

Das Ergebnis der Division von rechts ist: M=Q*L+R mit $Q = \begin{bmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & x^2+x^3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}$

Was ergibt die Division von links in diesem Beispiel?

1. Schritt: $M1 := M0 - \left(x^3 L \&^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad M1 := \begin{bmatrix} x+1 & x^4+x+1+x^3 \\ x^3+x & x^4+1 \end{bmatrix}$

$$M1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^5$$

2. Schritt: $M2 := M1 - \left(x^2 L \&^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad M2 := \begin{bmatrix} x+1 & x+1+x^3+x^2 \\ x^3+x & x^2+1 \end{bmatrix}$

$$M2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^4$$

3. Schritt: $M3 := M2 - \left(x L \&^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad M3 := \begin{bmatrix} 1 & x+1+x^2 \\ x & x+1+x^2 \end{bmatrix}$

$$M3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^3$$

4. Schritt: $M4 := M3 - \left(L \&^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad M4 := \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x \end{bmatrix}$

$$M4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^2$$

Nun kann aus Gradgründen nicht mehr weiter reduziert werden.

Das Ergebnis der Division von links ist: M=L*Q+R mit $Q = \begin{bmatrix} 0 & x+1+x^2 \\ x & 1+x^2+x^3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x \end{bmatrix}$