Lineare Algebra 2 **23. Juni 2003**
SoSe 2003
Schmale

10. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 30. Juni 2003

(33) (5 Punkte) **Zur Invarianz der Determinantenteiler.**
Zeigen Sie für $M \in \mathbb{Z}^{3\times 3}, \lambda \in \mathbb{Z}$ und $1 \leq r \leq 3$:

$$g_r\big(Q_1^3(\lambda)M\big) = g_r(M)$$

(34) (5 Punkte) **Smithform für Diagonalmatrizen.**

(a) Sind die beiden Matrizen $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$ äquivalent in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$?

(b) Sei R ein euklidischer Ring und seien $a, b, \in R$, beide $\neq 0$. Sei weiter g ein $ggT(a, b)$ und k ein $kgV(a, b)$. Zeigen Sie

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \qquad \text{[Bézout-Identität benutzen].}$$

(c) Bestimmen Sie unter Benutzung von (b) eine Smith-Form der folgenden Matrizen über $\mathbb{Z}$ bzw. über $\mathbb{Z}_2[x]$.

$$\mathrm{diag}(p_1^3 p_2^2 p_3,\ p_2 p_3^2,\ p_1 p_2 p_3,\ p_1 p_2)$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1 p_2 p_3$ und

$$\mathrm{diag}(x^3 + 1,\ x^2 + 1x^4 + x^2 + 1,\ x^2 + x + 1)$$

(35) (5 Punkte) **Smithform spezieller charakteristischer Matrizen.** Sei K ein Körper und sei $p \in K[x] \setminus K$ mit höchstem Koeffizienten 1. Bestimmen Sie die Smithform der charakteristischen Matrix

(a) von $C(p)$ der Beigleitmatrix zu p.

(b) von $A = \mathrm{diag}(C(p), C(p))$

(c) von $B = \mathrm{diag}(C(p), C(p)) + E_{r+1,r}$, wobei $r = \deg p$.

(36) (5 Punkte) **Zum Satz von Bézout.** In $\mathbb{Q}[x]^{2\times 2}$ sei

$$M := (xE - E_{11})(xE - E_{12})(xE - E_{22})(xE - E_{21})$$

und $\phi = \det M$.

(a) Erläutern Sie, wie mit Hilfe des Satzes von Bézout ohne zu rechnen gezeigt werden kann, dass $M^\bullet(E_{21}) = {}^\bullet M(E_{11})$.

(b) Bestimmen Sie: ${}^\bullet M(E_{21})$ und $M^\bullet(E_{11})$.

(c) Zeigen Sie ähnlich wie beim Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton und ohne zu rechnen: $\phi(E_{11}) = \phi(E_{21}) = 0$.

(d) Dividieren Sie M von rechts durch $(xE - E_{22})$.