Lineare Algebra 2 **30. Juni 2003**
SoSe 2003
Schmale

11. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 7. Juli 2003

(37) (3 Punkte) **Ähnlichkeit von A und ${}^{t}A$**
Zeigen Sie mit Hilfe der Sätze 6.3 und 10.5, dass für $A \in K^{n\times n}$, K ein Körper, gilt: $A \approx {}^{t}A$.

(38) (5 Punkte) Berechnen Sie die rationale kanonische und die Weierstraß'sche Normalform samt Transformationsmatrix für die folgende Matrix aus der Aufgabe (49) in LA1, jetzt aber aufgefasst als rationale Matrix: $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -8 & 0 \\ 19 & -18 & 32 & 16 \\ 15 & -15 & 26 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ aus $\mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(39) (5 Punkte) Sei $A \in \mathbb{Q}^{13\times 13}$. Die invarianten Faktoren, normiert auf höchsten Koeffizienten 1, von $(xE - A)$ seien

$$d_1 = \cdots = d_{10} = 1,\ d_{11} = x,\ d_{12} = x(x^2+1),\ d_{13} = x(x^2+1)^3 \ .$$

Bestimmen Sie
- **(a)** die **rationale kanonische Form** $\mathcal{C}(A)$,
- **(b)** diejenige **Weierstraß-Normalform** $\mathcal{E}(A)$, die der Anordnung $x, x, x, (x^2+1)^2, (x^2+1)^3$ der Elementarteiler von A (über $\mathbb{Q}$) entspricht.
- **(c)** die **Jacobson-Normalform** $\mathcal{J}(A)$ und
- **(d)** die Jacobson-Normalform $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(A)$, bei der A als Matrix über $\mathbb{C}$ aufgefasst wird (**Jordan-Normalform**).

(40) (3 Punkte) Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$, μ_A das Minimal- und φ_A das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 10.7: **Es gibt ein $k \in \mathbb{N}_+$, derart, dass $\varphi_A | \mu_A^k$**

(41) (5 Punkte)
- **(a)** Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Begründen Sie ausführlich, ob oder ob nicht die Matrix A einer der im Skript bzw. in der Vorlesung behandelten Normalformen entspricht.
- **(b)** Sei $K = \mathbb{Z}_2$. Bestimmen Sie alle möglichen rationalen kanonischen Formen für 3×3-Matrizen über K.

(42) (5 Punkte) **Normalform und Körpererweiterung**
- **(a)** Sei L ein Körper und K ein Unterkörper von L. Beispiel: $L = \mathbb{C}, K = \mathbb{Q}$. Seien $A \in K^{n\times n}, \mathcal{C}_L(A)$ die rationale kanonische Form von A aufgefasst als Element in $L^{n\times n}$ und $\mathcal{C}_K(A)$ die rationale kanonische Form von A als Element von $K^{n\times n}$. Wie hängen die beiden kanonischen Formen zusammen ? Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen/begründen Sie sie.
- **(b)** Geben Sie in (c) mit $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{R}$ (oder, wenn Sie das lieber mögen mit $K = \mathbb{Z}_2$ und $L = K[x]_{2,x^2+x+1} = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$) ein Beispiel einer Matrix an, bei der die Weierstaß-Normalform sich ändert beim Übergang von K zu L.

Bearbeiten Sie Aufgaben im Umfang von ca. 20 Punkten, darunter (39) und (42). Bei Aufgabe (38) sollten Sie die Rechenarbeit auf mehrere Schultern oder z.T auf Maple abladen können.